

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**UMA METODOLOGIA DE MODELAGEM VIBRO-ACÚSTICA  
DE CAIXA DE ENGRENAGEM DE USO VEICULAR**

TESE SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL  
DE SANTA CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO  
GRAU DE DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA

**NEWTON SURE SOEIRO**

FLORIANÓPOLIS - SC, MARÇO DE 2000.

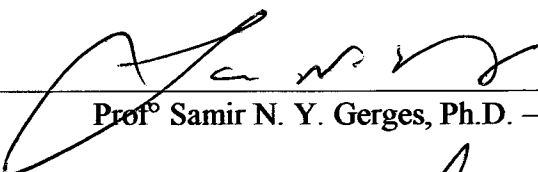
# UMA METODOLOGIA DE MODELAGEM VIBRO-ACÚSTICA DE CAIXA DE ENGRENAGEM DE USO VEICULAR

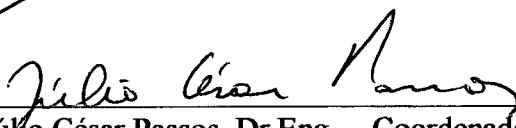
**Newton Sure Soeiro**

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

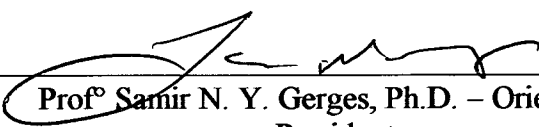
**DOUTOR EM ENGENHARIA**

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO VIBRAÇÕES E RUÍDO, E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

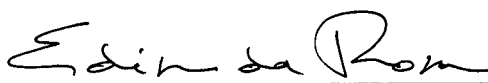
  
Prof<sup>o</sup> Samir N. Y. Gerges, Ph.D. – Orientador

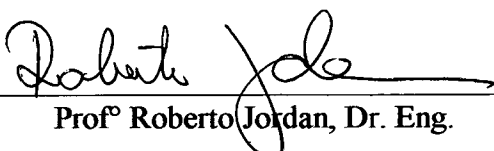
  
Prof<sup>o</sup> Júlio César Passos, Dr.Eng., - Coordenador do Curso

**BANCA EXAMINADORA:**


  
Prof<sup>o</sup> Samir N. Y. Gerges, Ph.D. – Orientador  
Presidente

  
Prof<sup>o</sup> Luiz Bevilacqua, Ph.D.

  
Prof<sup>o</sup> Edison da Rosa, Dr. Eng.

  
Prof<sup>o</sup> Roberto Jordan, Dr. Eng.

  
Prof<sup>o</sup> Alberto Luiz Serpa, Dr. Eng.

  
Eng<sup>o</sup> Júlio César De Luca, Dr. Eng.



À minha esposa Lucidalva.  
Aos meus filhos: Thiago e Laila.  
À minha mãe Nazira.

"Quando as nuvens negras dos pensamentos tormentosos cobrirem com escuro véu o horizonte de tuas esperanças, e a barca de teu coração agitar-se, desgovernada, sobre as ondas, quando as obrigações diárias, as dificuldades e os problemas, as surpresas - nem sempre agradáveis -, levarem-te a dizer: Que dia !

Lembra-te...Acorda a mensagem do Cristo adormecida em ti e...acalma-te !"

Autor desconhecido

"Qualquer caminho é apenas um caminho e não constitui insulto algum – para si mesmo ou para os outros – abandoná-lo quando assim ordena o coração. (...) Olhe cada caminho com cuidado e atenção. Tente-o tantas vezes quantas julgar necessárias ... Então, faça a si mesmo e apenas a si mesmo uma pergunta: possui esse caminho um coração? Em caso afirmativo, o caminho é bom. Caso contrário, esse caminho não possui importância alguma."

Carlos Castañeda, The Teachings of Don Juan.  
(Do livro o Tao da Física – Fritjof Capra)

## AGRADECIMENTOS

- \* A **Deus**, inteligência suprema, causa primária de todas as coisas, que me deu vida e oportunidade de exercitar a razão primeiro para encontrá-lo depois em meu coração.
- \* À minha mãe **Nazira Sure Soeiro** que, mesmo na falta de meu pai ainda em minha tenra idade, e com as dificuldades de toda ordem, soube educar-me despertando em mim o gosto pelo estudo, acompanhando-me com muita dedicação em todas as etapas de minha vida.
- \* À minha esposa **Lucidalva de Paula Batista Soeiro** e meus filhos **Laila Batista Soeiro** e **Thiago Batista Soeiro** por seus carinhos, estímulos e compreensão pelo tempo que “roubei” de nosso convívio.
- \* Ao professor e Ph.D. **Samir Nagi Yoursi Gerges** pela orientação, amizade e confiança em mim depositada, bem como por ter acreditado neste trabalho.
- \* À **Universidade Federal do Pará – UFPA** que permitiu o afastamento das minhas atividades de docência possibilitando o meu aperfeiçoamento profissional, bem como pelo apoio financeiro.
- \* Aos professores do **Departamento de Engenharia Mecânica – UFPA** pela compreensão e apoio.
- \* Aos professores do **Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica**, da Universidade Federal de Santa Catarina, pelos ensinamentos e convívio fraterno.
- \* Ao professor e Dr. **Roberto Jordan** pela amizade e contribuições valiosas durante o desenvolvimento deste trabalho.
- \* Ao professor e Ph.D. **Donald R. Houser**, Diretor do *Center for Automotive Research*, da *Ohio State University - USA*, pela colaboração e dedicação do seu tempo para possibilitar a determinação dos valores de rigidez de engrenamento e erro de transmissão dos pares de engrenagens.
- \* Ao Ph.D. **Teik C. LIM**, da *Ohio State University - USA*, que atendendo nossa solicitação dedicou parte de seu tempo para analisar nossa argumentação técnica sobre a modelagem dos mancais de rolamento, contribuindo para solidificar a confiança em nossa modelagem.
- \* Ao engenheiro e Dr. **Alberto Serpa**, da Eaton do Brasil (antiga CLARK Transmissões e Componentes), pela colaboração no fornecimento de algumas informações sobre a caixa de engrenagem usada na modelagem.

- \* Ao **Heinz Burkart**, da Divisão Automotiva, da Rolamentos FAG Ltda, e ao **Roberto Sampaio Garcia**, da TIMKEN, pelas informações referentes aos parâmetros de projeto dos rolamentos de esfera e de rolo.
- \* À **Fundação CERTI – UFSC** por tornar possível o mapeamento de pontos sobre a superfície do alojamento da caixa de engrenagem, contribuindo para a obtenção da malha de elementos finitos do alojamento.
- \* Aos bolsistas de iniciação científica **Fabiano Lima** e **Sideto Futatsugi** que, sob minha orientação, contribuíram nos trabalhos computacionais relacionados a construção dos modelos numéricos.
- \* Aos amigos da Pós-Graduação **Elizabete Bavastri**, **Felipe Vergara**, **Germano Riffel**, **Gustavo Dantas** e **Gustavo Mello**, pela amizade sincera e solidária sempre presente durante todo o tempo em que convivemos no decorrer deste trabalho e que, certamente, permanecerá viva apesar da distância.
- \* Ao companheiro de ideal espírita **João Sérgio Sell** pelos profundos conselhos de vida, pelo carinho e amizade, como também, por seu exemplo de caráter e honestidade.
- \* Aos casais de amigos e irmãos: **Itaeli e Nilza Pereira da Silva**, **Alfeu e Sueli Frezza**, pela amizade sincera e solidária, bem como pelos estímulos e incentivos nos momentos difíceis.
- \* À **Federação Espírita Catarinense – FEC** e a todos os irmãos que ali se dedicam ao esclarecimento e conforto de todos aqueles que procuram e/ou necessitam encontrar as verdades da vida após a vida.
- \* À **Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento e de Pessoal de Nível Superior – CAPES** pelo apoio financeiro concedido na qualidade de bolsa de doutorado.
- \* À querida cidade de **Florianópolis** pela acolhida e tantos momentos de alegria e felicidade desfrutados nos mais variados recantos de belezas em que a natureza foi tão pródiga em conceder.
- \* A todas as pessoas, que infelizmente não escrevi aqui seus nomes, mas que de uma forma ou de outra, contribuíram para o sucesso deste trabalho.
- \* A todos meu **RECONHECIMENTO** e **PROFUNDA GRATIDÃO**, por todos os momentos vividos durante esta jornada.

## SUMÁRIO

|  |     |
|--|-----|
| SIMBOLOGIA .....   | x   |
| LISTA DE FIGURAS .....   | xiv |
| LISTA DE TABELAS .....   | xix |
| RESUMO .....   | xx  |
| ABSTRACT .....   | xxi |
| <br>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO GERAL  |     |
| 1.1 – Introdução .....   | 1   |
| 1.2 – Natureza do Ruído de Engrenagem .....  | 3   |
| 1.3 – Trajetória de Transmissão de Ruído e Radiação Sonora<br>de Caixa de Engrenagem ..... | 4   |
| 1.4 – Motivação e Objetivos do Trabalho .....  | 7   |
| 1.5 – Estrutura do Trabalho .....  | 11  |
| <br>CAPÍTULO 2 – MODELAGEM DE MANCAIS DE ROLAMENTO   |     |
| 2.1 – Introdução .....   | 13  |
| 2.2 – Revisão Bibliográfica .....  | 13  |
| 2.3 – Desenvolvimento Teórico .....  | 15  |
| 2.3.1 – Relação Carga-Deflexão nos Rolamentos de Esfera e de Rolo .....                    | 17  |
| 2.3.2 – Matriz de Rigidez do Mancal de Rolamento .....                                     | 21  |
| 2.4 – Limitações da Formulação Matemática para o Mancal de Rolamento .....                 | 24  |
| 2.5 – Determinação Numérica da Matriz de Rigidez .....                                     | 25  |
| 2.6 – Aplicação do Método ao Sistema de Transmissão da Caixa de Engrenagem .....           | 26  |
| 2.6.1 – Subsistema Principal .....   | 27  |
| 2.6.2 – Subsistema Secundário .....  | 41  |

2.7 – Análise dos Resultados ..... 51

2.8 – Comentários Finais ..... 52

CAPÍTULO 3 – MODELO DO ENGRENAMENTO

3.1 – Introdução ..... 53

3.2 – Revisão Bibliográfica ..... 53

3.3 – Formulação Teórica da Matriz de Rigidez do Engrenamento ..... 56

3.4 – Metodologia para Cálculo da Rigidez de Engrenamento e Erro de Transmissão ..... 60

    3.4.1 – Cálculo das Deformações ..... 61

        3.4.1.1 – Deformação Torcional do Corpo da Engrenagem ..... 61

        3.4.1.2 – Deformação do Dente da Engrenagem ..... 63

        3.4.1.3 – Deformação de Contato dos Dentes ..... 66

    3.4.2 – Modificações do Dente ..... 66

    3.4.3 – Avaliação da Distribuição de Carga ..... 68

3.5 – Rigidez de Engrenamento e Erro de Transmissão para os Pares de Engrenagem  
    Helicoidais da Caixa de Engrenagem ..... 69

3.6 – Comentários Finais ..... 74

CAPÍTULO 4 – MODELO DE SISTEMA DE EIXOS ENGRENADOS

4.1 – Introdução ..... 78

4.2 – Revisão Bibliográfica ..... 78

4.3 – Hipóteses e Concepção do Modelo de Elementos Finitos ..... 81

    4.3.1 – Representação da Inércia e Rigidez dos Eixos ..... 83

    4.3.2 – Representação dos Mancais de Elementos Rolantes ..... 86

    4.3.3 – Representação das Engrenagens e Posicionadores ..... 86

    4.3.4 – Representação da Excitação Devido ao Engrenamento ..... 87

4.4 – Aplicação ao Sistema de Eixos Engrenados da Caixa de Engrenagem ..... 89

    4.4.1 – Análise Modal ..... 90

|                                |     |
|--------------------------------|-----|
| 4.4.2 – Análise Forçada .....  | 97  |
| 4.5 – Comentários Finais ..... | 114 |

## CAPÍTULO 5 – MODELO DO ALOJAMENTO

|  |     |
|--|-----|
| 5.1 – Introdução .....                                     | 120 |
| 5.2 – O Modelo de Elementos Finitos .....                  | 120 |
| 5.3 – Análise Modal Numérica .....                         | 123 |
| 5.4 – Análise Modal Experimental .....                     | 128 |
| 5.4.1 – Base Teórica da Análise Modal Experimental .....   | 129 |
| 5.4.2 – Análise Modal Experimental do Alojamento .....     | 131 |
| 5.5 – Comparação dos Modelos Numérico e Experimental ..... | 139 |
| 5.6 – Comentários Finais .....                             | 143 |

## CAPÍTULO 6 – RADIAÇÃO SONORA MODAL

|  |     |
|--|-----|
| 6.1 – Introdução .....                                     | 146 |
| 6.2 – Formulação Teórica e Procedimento de Cálculo .....   | 147 |
| 6.2.1 – Método Direto (Aproximação Colocacional) .....     | 148 |
| 6.2.2 – Método Indireto (Aproximação Variacional) .....    | 149 |
| 6.2.3 – Procedimento de Cálculo .....                      | 151 |
| 6.3 – Simulação da Placa Simplesmente Apoiada .....        | 154 |
| 6.4 – Simulação do Alojamento da Caixa de Engrenagem ..... | 158 |
| 6.5 – Comentários Finais .....                             | 162 |

## CAPÍTULO 7 – PREDIÇÃO DA RADIAÇÃO SONORA DA CAIXA DE ENGRENAGEM

|  |     |
|--|-----|
| 7.1 – Introdução .....                         | 164 |
| 7.2 – Modelo Global de Elementos Finitos ..... | 164 |
| 7.3 – Procedimento de Simulação .....          | 166 |
| 7.4 – Predição do Comportamento Dinâmico ..... | 167 |

|  |     |
|--|-----|
| 7.4.1 – Análise Modal .....  | 168 |
| 7.4.2 – Análise Harmônica .....  | 171 |
| 7.5 – Predição dos Parâmetros Acústicos .....  | 177 |
| 7.6 – Comentários Finais .....   | 186 |
| <br>CAPÍTULO 8 – CONCLUSÕES E SUGESTÕES  |     |
| 8.1 – Conclusões .....   | 190 |
| 8.2 – Sugestões para Trabalhos Futuros .....   | 194 |
| <br>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....   |     |
| 196  |     |
| <br>ANEXO 1 – Formulação Matemática para a Determinação da Constante<br>Carga-deflexão de rolamentos de esferas e de rolos ..... |     |
| 204  |     |
| <br>ANEXO 2 – Limitações do Modelo de Mancal de Elementos Rolantes .....   |     |
| 213  |     |
| <br>ANEXO 3 – Algoritmo para Solução de Sistemas de Equações Não-Lineares  |     |
| 220  |     |



## SIMBOLOGIA

|             |   |
|-------------|---|
| $A_n$       | admitância normal   |
| $A_{ik}^r$  | resíduo no polo (autovalor) $\lambda_r$   |
| $B$         | fator de curvatura total do rolamento de esfera   |
| $B$         | matriz de derivada das funções de forma   |
| $c$         | velocidade do som   |
| $C$         | comprimento para posicionamento de carga  |
| $C$         | matriz de amortecimento   |
| $d$         | diâmetro do elemento rolante  |
| $D$         | matriz de elasticidade do elemento  |
| $E$         | módulo de Young   |
| $E$         | vetor n-dimensional que contém equações   |
| $f_e$       | frequência de rotação do eixo   |
| $f_g$       | frequência de engrenamento  |
| $f^{nd}$    | vetor de carga nodal  |
| $f^r$       | vetor de carga correspondente às reações de apoio   |
| $F_i^{(e)}$ | força que atua no dente do par de engrenagens neutra, na direção $i$                              |
| $F_i^{(M)}$ | força que atua no dente do par de engrenagens referentes a marcha $M$ , na direção $i$            |
| $F$         | vetor de carga  |
| $G$         | comprimento para posicionamento de descontinuidade geométrica                                     |
| $G_t$       | módulo de elasticidade transversal  |
| $H$         | matriz de função de forma   |
| $HC$        | função degrau de carga  |
| $HG$        | função degrau de geometria  |
| $H_{ik}$    | função resposta em frequência, excitação aplicada na posição $k$ e resposta medida na posição $i$ |
| $i$         | vetor de elementos unitário   |
| $I$         | momento de inércia de área  |
| $I$         | matriz identidade   |

|                   |  |
|-------------------|--|
| $I_{m_i}$         | momento de inércia de massa referente a direção $i$  |
| $J$               | momento polar de inércia de área   |
| $\mathbf{J}_{ac}$ | Jacobiano do sistema de equações   |
| $J_t$             | momento de inércia torcional   |
| $k$               | número de onda   |
| $k_g$             | rigidez de engrenamento  |
| $k_{ij}$          | constante de rigidez correspondentes aos elementos de uma matriz de rigidez  |
| $\mathbf{K}$      | matriz de rigidez  |
| $K_{cd}$          | constante carga-deflexão do rolamento  |
| $\mathbf{K}_e$    | matriz de rigidez do engrenamento  |
| $\mathbf{K}_m$    | matriz de rigidez do mancal de rolamento   |
| $m_n$             | módulo normal da engrenagem  |
| $\mathbf{M}$      | matriz de massa  |
| $M_i$             | momento resultante em torno da direção $i$   |
| $M_{x-z}$         | momento fletor no plano X - Z  |
| $M_{y-z}$         | momento fletor no plano Y - Z  |
| $n$               | expoente que caracteriza o tipo de rolamento   |
| $n_b$             | índice da banda lateral do espectro medido   |
| $n_h$             | índice do harmônico da frequência de engrenamento  |
| $p$               | pressão  |
| $P_j$             | carga normal resultante no $j$ -ésimo elemento rolante   |
| $\mathbf{q}$      | vetor deslocamento   |
| $r$               | raio do centro de curvatura da pista do anel interno (para rolamento de esfera) ou<br>raio do círculo primitivo (para rolamento de rolo) |
| $r_e$             | raio de curvatura da pista do anel externo do rolamento de esfera  |
| $r_i$             | raio de curvatura da pista do anel interno do rolamento de esfera  |
| $r_L$             | folga radial   |
| $R_b$             | raio do círculo de base da engrenagem  |
| $R_{bc}$          | raio do círculo de base da coroa   |
| $R_{bp}$          | raio do círculo de base do pinhão  |

|                               |   |
|-------------------------------|---|
| $R_i$                         | força resultante na direção $i$   |
| $R_i^{(k)}$                   | reação de apoio que atua no $k$ -ésimo mancal de rolamento na direção $i$ |
| $R_p^{(k)}$                   | raio primitivo da $k$ -ésima engrenagem                                   |
| $S$                           | área da seção transversal   |
| $\mathbf{S}$                  | matriz de coeficientes de influência                                      |
| $S_{\text{rad}}$              | área da superfície de radiação  |
| $t$                           | espessura   |
| $T$                           | torque  |
| $T_e$                         | torque de entrada   |
| $\mathbf{u}^e$                | vetor de deslocamento do elemento finito                                  |
| $\dot{\mathbf{u}}^e$          | vetor de velocidade do elemento finito                                    |
| $\ddot{\mathbf{u}}^e$         | vetor de aceleração do elemento finito                                    |
| $\langle \bar{V}_0^2 \rangle$ | velocidade média quadrática, média temporal e espacial                    |
| $W_{\text{rad}}$              | potência sonora radiada   |
| $\mathbf{Y}$                  | vetor da variável de folga  |
| $Z$                           | número de elementos rolantes do rolamento                                 |
| $Z_g$                         | número de dentes da engrenagem  |
| $\alpha_i$                    | deslocamento angular em torno da direção $i$ .                            |
| $\beta_e$                     | ângulo de contato da pista do anel externo                                |
| $\beta_i$                     | ângulo de contato da pista do anel interno                                |
| $\beta_j$                     | ângulo de contato com carga   |
| $\beta_0$                     | ângulo de contato sem carga   |
| $\delta_i$                    | deslocamento de translação na direção $i$                                 |
| $\delta r_j$                  | deslocamento na direção radial referente ao $j$ -ésimo elemento rolante   |
| $\delta a_j$                  | deslocamento na direção axial referente ao $j$ -ésimo elemento rolante    |
| $\Delta_F$                    | deformação de flexão do dente da engrenagem                               |
| $\Delta_H$                    | deformação de contato dos dentes das engrenagens                          |
| $\Delta_j$                    | deformação total do $j$ -ésimo elemento rolante                           |

|                       |  |
|-----------------------|--|
| $\Delta_T$            | deformação torcional do corpo da engrenagem  |
| $\varepsilon$         | erro de transmissão  |
| $\phi_h$              | ângulo de hélice   |
| $\phi_n$              | ângulo de pressão normal   |
| $\phi_t$              | ângulo de pressão transversal  |
| $\eta$                | amortecimento estrutural   |
| $\lambda$             | comprimento de onda  |
| $\lambda_j$           | j-ésimo autovalor  |
| $\mu$                 | <i>double layer potencial</i> (diferença de pressão entre os dois lados de uma superfície)                 |
| $\nu$                 | coeficiente de Poisson   |
| $\ddot{\theta}$       | aceleração angular   |
| $\rho$                | massa específica   |
| $\sigma$              | <i>single layer potencial</i> (diferença de velocidade de partícula entre os dois lados de uma superfície) |
| $\sigma_{\text{rad}}$ | eficiência de radiação sonora  |
| $\omega_j$            | freqüência natural do j-ésimo modo de vibração   |
| $\Omega$              | freqüência de excitação  |
| $\xi$                 | vetor de separação inicial   |
| $\xi_k$               | separação inicial no ponto k   |
| $\psi_j$              | posição angular do j-ésimo elemento rolante  |
| $\Psi_j$              | j-ésimo autovetor  |
| $\zeta_j$             | fator de amortecimento do j-ésimo modo de vibração   |

## LISTA DE FIGURAS

|      |   |    |
|------|---|----|
| 1.1  | Diferença de vibração média relativa entre o motor e a caixa de engrenagem para seis unidades de potência distintas ..... | 2  |
| 1.2  | Engrenagens acopladas e força de compressão elástica .....  | 4  |
| 1.3  | Vibração estrutural e variação de velocidade .....  | 5  |
| 1.4  | Descrição gráfica da terminologia do espectro medido .....  | 5  |
| 1.5  | Mecanismo de geração de ruído .....   | 6  |
| 1.6  | Característica do movimento ondulatório do alojamento .....   | 6  |
| 1.7  | Trajectoria de transmissão de vibração e ruído em uma caixa de engrenagem de uso veicular .....                           | 7  |
| 1.8  | Caixa de engrenagem de uso veicular .....   | 10 |
| 2.1  | Mudança do ângulo de contato devido a carga e velocidade .....  | 15 |
| 2.2  | Efeito de carga e velocidade sobre a rigidez radial do rolamento .....  | 16 |
| 2.3  | Efeito do ângulo de contato e velocidade sobre a rigidez radial .....   | 16 |
| 2.4  | Sistema de coordenadas e posição dos elementos rolantes .....   | 17 |
| 2.5  | Deformação elástica do elemento rolante .....   | 19 |
| 2.6  | Sistema de referência e diagrama de carga do elemento rolante .....   | 21 |
| 2.7  | Método de linearização para cálculo da rigidez do mancal .....  | 21 |
| 2.8  | Desenho esquemático do sistema de transmissão da caixa de engrenagem .....  | 27 |
| 2.9  | Diagrama de corpo livre para o eixo piloto .....  | 29 |
| 2.10 | Diagrama de corpo livre do eixo principal .....   | 30 |
| 2.11 | Variação dos coeficientes de rigidez para o mancal B <sub>4</sub> .....   | 37 |
| 2.12 | Variação dos coeficientes de rigidez para o mancal B <sub>5</sub> .....   | 38 |
| 2.13 | Variação dos coeficientes de rigidez para o mancal B <sub>6</sub> .....   | 39 |
| 2.14 | Variação dos coeficientes de rigidez para o mancal B <sub>7</sub> .....   | 40 |
| 2.15 | Diagrama de corpo livre do eixo carretel .....  | 42 |
| 2.16 | Variação dos coeficientes de rigidez para o mancal B <sub>1</sub> .....   | 48 |
| 2.17 | Variação dos coeficientes de rigidez para o mancal B <sub>2</sub> .....   | 49 |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 2.18 | Variação dos coeficientes de rigidez para o mancal B <sub>3</sub> .....                                | 50 |
| 3.1  | Modelos de engrenamento com flexibilidade do dente da engrenagem .....                                 | 54 |
| 3.2  | Modelos para dinâmica de engrenagens .....   | 55 |
| 3.3  | Modelo do engrenamento .....   | 57 |
| 3.4  | Modelo para cálculo das deformações por torção: engrenagem de entrada .....                            | 62 |
| 3.5  | Modelo para cálculo das deformações por torção: engrenagem de saída .....                              | 63 |
| 3.6  | Modelo de placa em balanço .....   | 64 |
| 3.7  | Efeito da imagem especular .....   | 65 |
| 3.8  | Modelo de deflexão de rotação e translação da base do dente .....                                      | 65 |
| 3.9  | Ilustração da separação inicial .....  | 67 |
| 3.10 | Modificação do dente da engrenagem .....   | 67 |
| 3.11 | Modificação de perfil para o par de engrenagens de entrada .....                                       | 71 |
| 3.12 | Modificação de <i>Lead</i> para o par de engrenagens de entrada .....                                  | 71 |
| 3.13 | Modificação de perfil para o par de 1ª marcha .....  | 72 |
| 3.14 | Modificação de <i>Lead</i> para o par de 1ª marcha .....   | 72 |
| 3.15 | Modificação de perfil para o par de 3ª marcha .....  | 73 |
| 3.16 | Modificação de <i>Lead</i> para o par de 3ª marcha .....   | 73 |
| 3.17 | Erro de transmissão para o par de engrenagens neutras, perfis de dentes e torques distintos .....      | 75 |
| 3.18 | Erro de transmissão para o par de engrenagens de 1ª marcha, perfis de dentes e torques distintos ..... | 76 |
| 3.19 | Erro de transmissão para o par de engrenagens de 3ª marcha, perfis de dentes e torques distintos ..... | 77 |
| 4.1  | Representação esquemática de um sistema de rotor engrenado .....                                       | 82 |
| 4.2  | Esboço referente à auto excitação do engrenamento .....  | 88 |
| 4.3  | Modelos de elementos finitos do sistema de eixos engrenados .....                                      | 89 |
| 4.4  | Valores absolutos da diferença relativa para condição de 1ª marcha .....                               | 96 |
| 4.5  | Valores absolutos da diferença relativa para condição de 3ª marcha .....                               | 96 |

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 4.6  | Formas modais relativas à condição de 1ª marcha .....                    | 98  |
| 4.7  | Formas modais relativas à condição de 3ª marcha .....                    | 99  |
| 4.8  | Formas deformadas para carga de 50 % de T em 1ª marcha .....             | 102 |
| 4.9  | Reação de apoio na direção X para carga de 100 % de T em 3ª marcha ..... | 104 |
| 4.10 | Reação de apoio na direção Y para carga de 100 % de T em 3ª marcha ..... | 105 |
| 4.11 | Reação de apoio na direção Z para carga de 100 % de T em 3ª marcha ..... | 106 |
| 4.12 | Momento em torno de X para carga de 100 % de T em 3ª marcha .....        | 107 |
| 4.13 | Momento em torno de Y para carga de 100 % de T em 3ª marcha .....        | 108 |
| 4.14 | Reação de apoio na direção X para carga de 50 % de T em 3ª marcha .....  | 109 |
| 4.15 | Reação de apoio na direção Y para carga de 50 % de T em 3ª marcha .....  | 110 |
| 4.16 | Reação de apoio na direção Z para carga de 50 % de T em 3ª marcha .....  | 111 |
| 4.17 | Momento em torno de X para carga de 50 % de T em 3ª marcha .....         | 112 |
| 4.18 | Momento em torno de Y para carga de 50 % de T em 3ª marcha .....         | 113 |
| 4.19 | Reação de apoio na direção X para carga de 100 % de T em 1ª marcha ..... | 115 |
| 4.20 | Momento em torno de X para carga de 100 % de T em 1ª marcha .....        | 116 |
| 4.21 | Reação de apoio na direção X para carga de 50 % de T em 1ª marcha .....  | 117 |
| 4.22 | Momento em torno de X para carga de 50 % de T em 1ª marcha .....         | 118 |
| 5.1  | Medição de pares ordenados dos pontos na superfície do alojamento .....  | 121 |
| 5.2  | Variação do peso do modelo do alojamento .....                           | 123 |
| 5.3  | Variação do tempo de processamento .....                                 | 124 |
| 5.4  | Comparação da frequência de diferentes modos .....                       | 124 |
| 5.5  | Modelo de elementos finitos do alojamento .....                          | 124 |
| 5.6  | Primeiro modo (1050,9 Hz) .....  | 126 |
| 5.7  | Segundo modo (1324,9 Hz) .....   | 126 |
| 5.8  | Terceiro modo (1424,9 Hz) .....  | 126 |
| 5.9  | Quarto modo (1541,30 Hz) .....   | 126 |
| 5.10 | Quinto modo (1639,3 Hz) .....  | 127 |
| 5.11 | Sexto modo (1725,3 Hz) .....   | 127 |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 5.12 | Sétimo modo (1861,7 Hz) .....   | 127 |
| 5.13 | Oitavo modo (1880,0 Hz) .....   | 127 |
| 5.14 | Nono modo (1968,5 Hz) .....   | 127 |
| 5.15 | Décimo modo (2042,0 Hz) .....   | 127 |
| 5.16 | Análise modal com excitador eletrodinâmico ( <i>Shaker</i> ) .....                | 128 |
| 5.17 | Malha experimental de pontos para medição das FRF .....                           | 132 |
| 5.18 | Alojamento e equipamentos usados no experimento .....                             | 132 |
| 5.19 | Montagem para a calibração simultânea dos transdutores .....                      | 133 |
| 5.20 | FRF do tipo inertância típica para a posição 143 do alojamento .....              | 134 |
| 5.21 | Função indicadora de modos (MIF) e a média das FRF medidas .....                  | 134 |
| 5.22 | Sobreposição de FRF medida e sintetizada em três trechos consecutivos .....       | 136 |
| 5.23 | Diagrama de complexidade para os modos de vibração de 1 a 10 do alojamento .....  | 137 |
| 5.24 | Diagrama de complexidade para os modos de vibração de 11 a 20 do alojamento ..... | 137 |
| 5.25 | Diagrama de complexidade para os modos de vibração de 21 a 30 do alojamento ..... | 138 |
| 5.26 | Diagrama de complexidade para os modos de vibração de 31 a 40 do alojamento ..... | 138 |
| 5.27 | Comparação entre frequências naturais obtidas no MODESH .....                     | 139 |
| 5.28 | Comparação das formas modais do primeiro modo de vibração .....                   | 141 |
| 5.29 | Comparação das formas modais do segundo modo de vibração .....                    | 142 |
| 5.30 | Matriz erro de massa para as coordenadas de 1 a 160 .....                         | 143 |
| 5.31 | Matriz erro de rigidez para as coordenadas de 1 a 160 .....                       | 144 |
| 6.1  | Esquema do procedimento adotado na simulação numérica MEF/MEC .....               | 152 |
| 6.2  | Transposição de dados da malha estrutural para a malha acústica .....             | 153 |
| 6.3  | Modelo de elementos finitos da placa quadrada .....                               | 155 |
| 6.4  | Formas modais da placa quadrada obtidas pelo ANSYS .....                          | 156 |
| 6.5  | Pressão acústica na superfície da placa quadrada obtida pelo SYSNOISE .....       | 157 |
| 6.6  | Malha acústica do alojamento da caixa de engrenagem .....                         | 159 |
| 6.7  | Problema exterior e interior com as respectivas condições de contorno .....       | 159 |
| 6.8  | Malhas de elementos de impedância singular e seus posicionamentos .....           | 161 |



|         |   |     |
|---------|---|-----|
| 6.9     | <i>Doble Layer Potencial</i> para os 10 primeiros modos de vibração do alojamento .   | 163 |
| 7.1     | Método de junção dos modelos pela matriz de rigidez do mancal .....   | 165 |
| 7.2     | Modelo global da caixa de engrenagem e suas partes .....  | 166 |
| 7.3     | Esquema do procedimento de simulação do problema de radiação sonora .....   | 167 |
| 7.4     | Malha estrutural da caixa de engrenagem e condições de contorno .....   | 169 |
| 7.5     | Vista lateral da forma modal referente a $f_n = 207,51$ Hz, na condição de 1ª marcha e 100% de T .....                            | 171 |
| 7.6     | Amplitude de velocidade, em nós sobre a superfície do alojamento, para condição de 1ª marcha – 100% de T – C. C. Fixa-Fixa .....  | 173 |
| 7.7     | Amplitude de velocidade, em nós sobre a superfície do alojamento, para condição de 1ª marcha – 100% de T – C. C. Fixa-Livre ..... | 174 |
| 7.8     | Amplitude de velocidade, em nós sobre a superfície do alojamento, para condição de 3ª marcha – 50% de T – C. C. Fixa-Fixa .....   | 175 |
| 7.9     | Amplitude de velocidade, em nós sobre a superfície do alojamento, para condição de 3ª marcha – 50% de T – C. C. Fixa-Livre .....  | 176 |
| 7.10    | Posicionamento dos nós sobre a superfície do alojamento .....   | 177 |
| 7.11(a) | Espectro discreto de potência sonora radiada e eficiência de radiação .....   | 179 |
| 7.11(b) | Espectro discreto de potência sonora radiada e eficiência de radiação .....   | 180 |
| 7.11(c) | Espectro discreto de potência sonora radiada e eficiência de radiação .....   | 181 |
| 7.11(d) | Espectro discreto de potência sonora radiada e eficiência de radiação .....   | 182 |
| 7.12(a) | Mapeamento de pressão sonora em condições operacionais distintas .....  | 184 |
| 7.12(b) | Mapeamento de pressão sonora em condições operacionais distintas .....  | 185 |
| 7.13    | Diagramas de diretividade ( $f = 1264,8$ Hz – F1T100H30) .....  | 187 |
| 7.14    | Diagramas de diretividade ( $f = 1264,8$ Hz – L1T100H30) .....  | 187 |
| 7.15    | Diagramas de diretividade ( $f = 1040$ Hz – F1T100H40) .....  | 188 |
| 7.16    | Diagramas de diretividade ( $f = 1040$ Hz – L1T100H40) .....  | 188 |
| 7.17    | Diagramas de diretividade ( $f = 1300$ Hz – F3T50H50) .....   | 189 |
| 7.18    | Diagramas de diretividade ( $f = 1300$ Hz – F3T50H50) .....   | 189 |

## LISTA DE TABELAS

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 1.1 | Reduções de velocidade da caixa de engrenagem .....                   | 10  |
| 2.1 | Parâmetros dos rolamentos do subsistema principal .....               | 36  |
| 2.2 | Propriedades geométricas dos eixo principal .....                     | 36  |
| 2.3 | Propriedades geométricas das engrenagens .....                        | 37  |
| 2.4 | Parâmetros dos rolamentos do subsistema secundário .....              | 47  |
| 2.5 | Propriedades geométricas dos eixo carretel .....                      | 47  |
| 3.1 | Dados básicos para os pares de engrenagem usados .....                | 70  |
| 3.2 | Valores Médios da rigidez de engrenamento .....                       | 74  |
| 4.1 | Constantes reais dos elementos MASS21 do modelo da Fig. 4.3.(b) ..... | 91  |
| 4.2 | Constantes reais dos elementos MASS21 do modelo da Fig. 4.3.(a) ..... | 92  |
| 4.3 | Frequências naturais para a condição de 1ª marcha .....               | 94  |
| 4.4 | Frequências naturais para a condição de 3ª marcha .....               | 95  |
| 4.5 | Frequências de excitação em Hz .....                                  | 101 |
| 6.1 | Frequências naturais para uma placa quadrada de alumínio .....        | 155 |
| 6.2 | Eficiência de radiação modal de uma placa quadrada .....              | 158 |
| 6.3 | Valores de eficiência de radiação para diferentes malhas .....        | 160 |
| 7.1 | Frequências naturais para o modelo global .....                       | 170 |
| 7.2 | Condições de operação para simulação em 1ª marcha .....               | 172 |
| 7.3 | Condições de operação para simulação em 3ª marcha .....               | 172 |
| 7.4 | Tempo de processamento do modelo acústico .....                       | 186 |

## RESUMO

O desenvolvimento de componentes com baixa emissão de ruído e vibração, para veículos em geral, é uma forte demanda por parte da indústria automobilística, motivada pela legislação ambiental atual, critério de conforto e exigências por parte de usuários de veículos. Paralelamente, fatores tais como considerações de acondicionamento, redução de peso, aumento de turboalimentação, bem como a utilização de motores de alta velocidade para veículos em geral, têm levado a indústria ao desenvolvimento de motores cada vez mais compactos, enquanto que suas caixas de engrenagem têm aumentado de tamanho, para que ela possa acomodar o aumento do número de marchas e faixa de velocidade, devido à necessidade de se aumentar a eficiência global da transmissão e a dirigibilidade do veículo. Assim, as caixas de engrenagem de uso veicular tem se destacado como uma fonte de ruído e vibração importante no veículo, merecendo muita atenção por parte dos engenheiros que procuram estudar seu comportamento de vibração estrutural e a radiação acústica a ele relacionada. Entretanto, estes problemas são de tratamento matemático analítico difícil, principalmente, quando estão relacionados a uma estrutura complexa, tal como uma caixa de engrenagem de uso veicular, o que tem levado os pesquisadores a desenvolverem grandes esforços experimentais para caracterizar o campo acústico.

Neste trabalho, apresenta-se uma metodologia de modelagem global para caixas de engrenagem, tendo por base os métodos de elementos finitos e elementos de contorno, cujo enfoque principal é para as vibrações e ruídos transportados pela estrutura e que têm como origem a excitação provocada pelo engrenamento, de modo a permitir a predição de parâmetros vibro-acústicos. Assim, são apresentadas as formulações matemáticas que permitem a determinação de matrizes de rigidez generalizadas, para a representação de mancais de elementos rolantes e do engrenamento; o desenvolvimento de um modelo numérico de sistema de eixos engrenados, que permite estimar as reações nos mancais devido ao engrenamento e a influência da modificação do perfil dos dentes das engrenagens; a concepção e criação de uma malha de elementos finitos para representação do alojamento da caixa de engrenagem, bem como a malha acústica correspondente usada para a estimativa de parâmetros acústicos pelo método de elementos de contorno. A metodologia é aplicada a uma caixa de engrenagem de uso veicular real e o comportamento vibro-acústico é predito para condições operacionais distintas.

## ABSTRACT

The development of components with low noise emission and vibration, for vehicles in general, is of major interest to the automotive industry and is motivated by the current environmental legislation and consumer demands for comfort. In parallel to these considerations are such factors as packaging, weight reduction, as well as the use of high-speed turbo charged motors for vehicles in general has been taking the industry further towards the development of more compact motors. Conversely, due to the need to increase the global efficiency of the transmission system and the drivability of the vehicle, gearboxes have been increasing in size in order to accommodate the increasing of the gear number and rotational speed. Thus, gearboxes have become highlighted as an important source of noise and vibration in the vehicle that requires more attention on the part of automotive engineers so that structural vibration and the acoustical radiation can be correctly related to a particular design. Due to the complex structure of a gearbox and relation to the vehicle, these problems are difficult to analyse mathematically and, often, experimental measurements offer the only reliable method to characterise the acoustic field.

The purpose of this work is to demonstrate a methodology for the global modelling of gearboxes based on the method of finite elements and boundary elements whose main focus is for the transmission of vibration and noise by a structure excited by a source such as the meshing of gear teeth, etc. By using this method of analysis, the prediction of vibro-acoustic parameters related to the problem can be achieved.

Presented in this work are the mathematical formulations to allow the determination of the stiffness matrix for the representation of ball or roller bearing contact and gear tooth contact as well as the development of a numerical model of a geared shaft system that allows the determination of bearing reactions and the estimation of the influence of a modified tooth profile due meshing of the gears. Also presented is the concept and creation of a finite element mesh for representation of the gearbox casing and a corresponding acoustic mesh for the estimation of acoustic parameters using the method of boundary elements.

Finally, the method is applied to a real vehicle gearbox and a vibro-acoustic behaviour is predicted for different operational conditions.

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 - INTRODUÇÃO

Atualmente, fatores tais como considerações de acondicionamento, redução de peso, aumento no uso de turboalimentação, bem como a utilização de motores de alta velocidade para veículos em geral, têm levado a indústria automotiva a desenvolver motores cada vez menores, enquanto que suas caixas de engrenagem ficam cada vez maiores. O aumento correspondente no tamanho da caixa de engrenagem é devido principalmente à necessidade de se melhorar a eficiência global da transmissão e a dirigibilidade dos veículos. Assim, no passado, três marchas para a frente eram consideradas adequadas para a família de carros existentes, mas agora cinco marchas tornaram-se comuns, resultando assim em um grande aumento na caixa de engrenagem para que ela possa acomodar o aumento dos componentes.

Como a caixa de engrenagem torna-se cada vez maior, ela se transforma em uma expressiva fonte de ruído de todo o trem de potência do veículo, uma vez que a potência sonora radiada  $W_{rad}$ , em uma frequência  $f$ , de uma máquina de área de superfície  $S_{rad}$  e vibrando com uma velocidade média quadrática, média temporal e espacial  $\langle \bar{V}_0^2 \rangle$ , é dada por [24]:

$$W_{rad} = \rho \cdot c \cdot S_{rad} \cdot \sigma_{rad} \cdot \langle \bar{V}_0^2 \rangle \quad (1.1)$$

onde  $\rho \cdot c$  é a impedância específica do ar e  $\sigma_{rad}$  a eficiência de radiação. Portanto, assumindo-se que a impedância do ar e a eficiência permaneçam constante em cada uma das frequências, a potência sonora será proporcional a vibração média quadrática e a área da superfície externa da caixa de engrenagem. Assim, fica claro que o aumento da caixa de engrenagem geralmente leva a um aumento de ruído radiado e, em consequência, ao aumento da potência sonora radiada.

Estudos realizados em algumas unidades de potência têm mostrado que existe uma pequena diferença entre a vibração média da superfície de motores e suas respectivas caixas de engrenagem [46], conforme mostrado na Fig. 1.1. Quando as caixas de engrenagem possuíam uma área de superfície aproximadamente igual a 25 % da área da superfície do motor, o ruído resultante não era de interesse maior. Contudo, agora que algumas caixas de engrenagem

apresentam grande área de superfície, quando comparada com a área do motor correspondente, o ruído da caixa de engrenagem tem tornado-se uma fonte de ruído dominante.

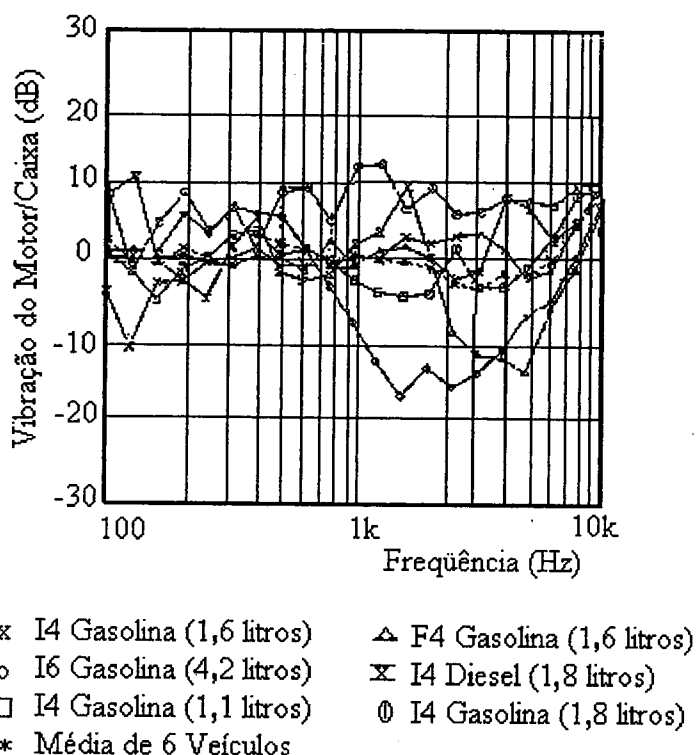


Figura 1.1 - Diferença de vibração média relativa entre o motor e a caixa de engrenagem para seis unidades de potência distintas [46].

O fato de que o motor e sua caixa de engrenagem apresentam níveis similares de vibração não é uma coincidência, uma vez que sendo as duas estruturas rigidamente acopladas, o fluxo de energia de vibração de uma unidade para outra ocorre devido ao fato de que a impedância mecânica é relativamente baixa. Assim, um motor pode ser um irradiador muito bom de ruído de engrenagem e, de forma similar, uma caixa de engrenagem pode ser um irradiador de ruído do motor (por exemplo, ruído de combustão e *Piston Slap*).

Uma vez que atualmente a caixa de engrenagem é considerada uma fonte de ruído importante dos veículos automotivos, ela passou a ser alvo de estudos e desenvolvimentos com objetivo de melhor conhecer o seu comportamento vibro-acústico, de modo a se terem elementos que permitam estabelecer a redução do nível de ruído por ela radiado e, desta forma, atender às legislações reguladoras de poluição sonora e às exigências cada vez maiores dos usuários deste produto.

## 1.2 - NATUREZA DO RUÍDO DE ENGRENAGEM

O ruído de engrenagem pode ser dividido em duas categorias principais: *Whine* (Choro) e *Rattle* (Chocalho). O *Rattle* de engrenagem é um fenômeno transiente que geralmente ocorre sob condições de carga leve e consiste no impacto dos dentes das engrenagens, por folga entre eles, devido à vibração torcional do sistema de transmissão [4 e 86], conforme ilustrado na Fig. 1.2. Na prática é possível se identificar dois tipos de ruído de *Rattle* conhecidos como *Neutral Rattle* e *Drive Rattle*. O primeiro é gerado com a transmissão em ponto morto e a embreagem acoplada, enquanto que o segundo ocorre nos pontos do engrenamento em carga leve e sob condições de movimento. Os impactos dos dentes, para o ruído de *Drive Rattle*, ocorrem quando a aceleração angular é bastante alta para fazer com que o torque de inércia na engrenagem motora seja maior do que seu torque de arraste [78], ou seja:

$$J_t \cdot \ddot{\theta} > T \quad (1.2)$$

onde  $J_t$  é o momento de inércia torcional da engrenagem motora,  $\ddot{\theta}$  sua aceleração angular e  $T$  o seu torque de arraste. Assim, com base na Eq.(1.2), pode-se definir a aceleração angular crítica acima da qual o *Drive Rattle* começa a ocorrer:

$$\ddot{\theta}_{\text{critico}} = \frac{T}{J_t} \quad (1.3)$$

Portanto, o ruído de *Rattle* é gerado quando a aceleração angular alcança valores altos. Este fato está demonstrado na Fig. 1.3 a qual apresenta a aceleração de vibração no domínio do tempo, registrada simultaneamente com a flutuação de velocidade medida no eixo primário, eixo secundário e volante. Visto que a aceleração angular é a primeira derivada da velocidade angular, e que a forma da flutuação da velocidade angular é similar a uma senóide, a máxima aceleração angular ocorre exatamente no momento em que a flutuação da velocidade angular é nula.

O ruído de *Whine* é um som contínuo e permanente que é primariamente atribuído ao erro de transmissão e as deformações elásticas dos dentes e corpo da engrenagem que ocorrem sob carga [27]. O erro de transmissão é o desvio da posição angular da engrenagem, em relação à

posição ideal. Esta ação produz forças dinâmicas no dente da engrenagem na frequência de engrenamento,  $f_g$  (Hz), dada por:

$$f_g = Z_g \cdot f_e \quad (1.4)$$

onde  $Z_g$  é o número de dentes da engrenagem montada no eixo, que gira com uma velocidade de rotação  $f_e$  (Hz). Vários harmônicos da frequência de engrenamento são também notados em dados de medições, bem como bandas laterais em  $f_g \pm n_b \cdot f_e$ , onde  $n_b$  é um número inteiro e  $f_e$  pode representar alguma das frequências de rotação dos eixos, conforme mostrado na Fig. 1.4.

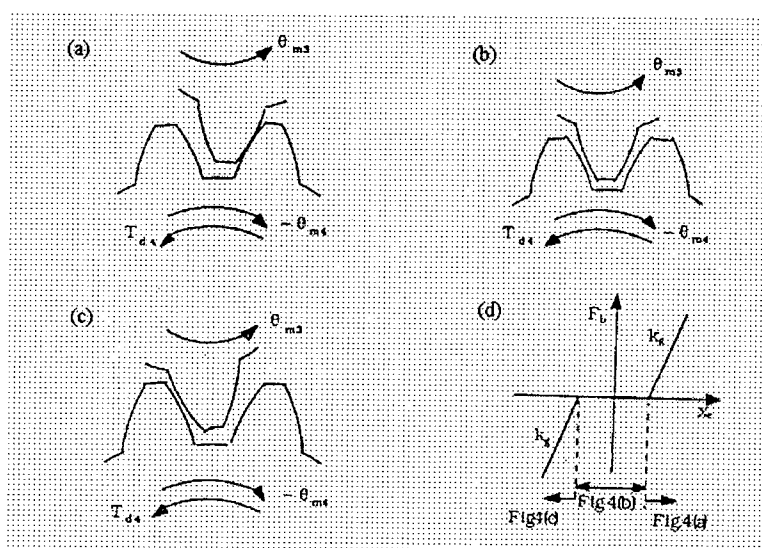


Figura 1.2 – Engrenagens acopladas e força de compressão elástica [86].

- (a) Engrenagens em contato na face de impulsão dos dentes
- (b) Engrenagens sem contato
- (c) Engrenagens em contato na face oposta dos dentes
- (d) Força de compressão elástica com rigidez do engrenamento  $k_g$

### 1.3 - TRAJETÓRIA DE TRANSMISSÃO DE RUÍDO E RADIAÇÃO SONORA DE CAIXA DE ENGRENAGEM

Os esforços dinâmicos gerados no engrenamento excitam modos vibratórios torcional-axial-transversal acoplados do eixo das engrenagens e produzem deslocamentos lateral e vertical nos mancais de sustentação do conjunto eixo-engrenagem. Assim, devido ao movimento relativo



dos mancais, forças e momentos dinâmicos são gerados e causam o aparecimento de vibração e ruído da caixa de engrenagem, em todas as frequências de engrenamento [85]. Então, as superfícies do alojamento interagem com o fluido circundante gerando ondas de pressão acústica e, em consequência, a radiação sonora da caixa de engrenagem. A Fig. 1.5, apresenta de forma esquemática o mecanismo de geração de ruído.

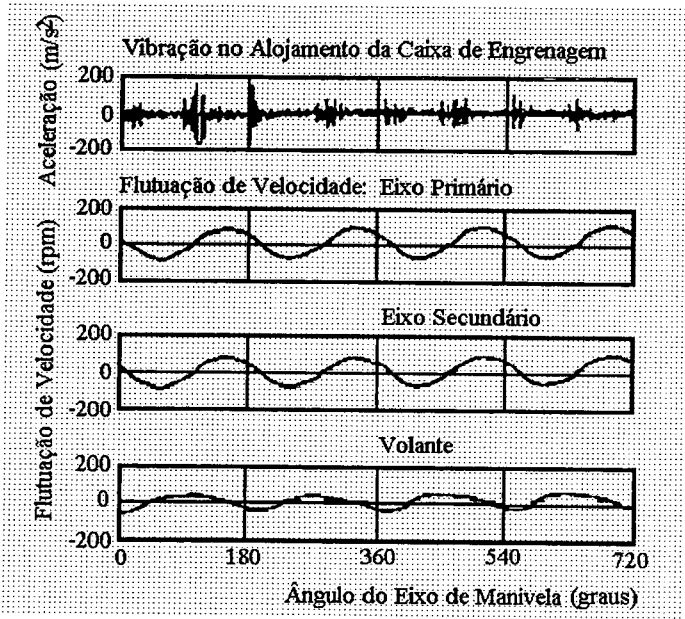


Figura 1.3 – Vibração estrutural e variação de velocidade [78].  
(1500 rpm, plena carga, 5ª marcha)

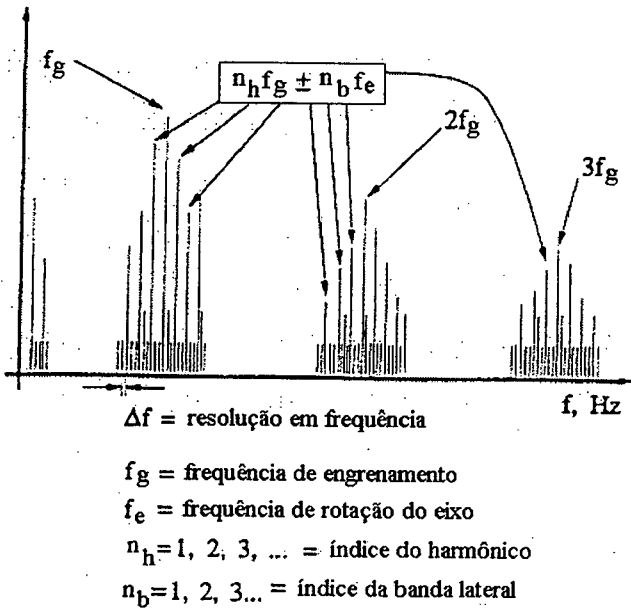


Figura 1.4 – Descrição gráfica da terminologia do espectro medido.

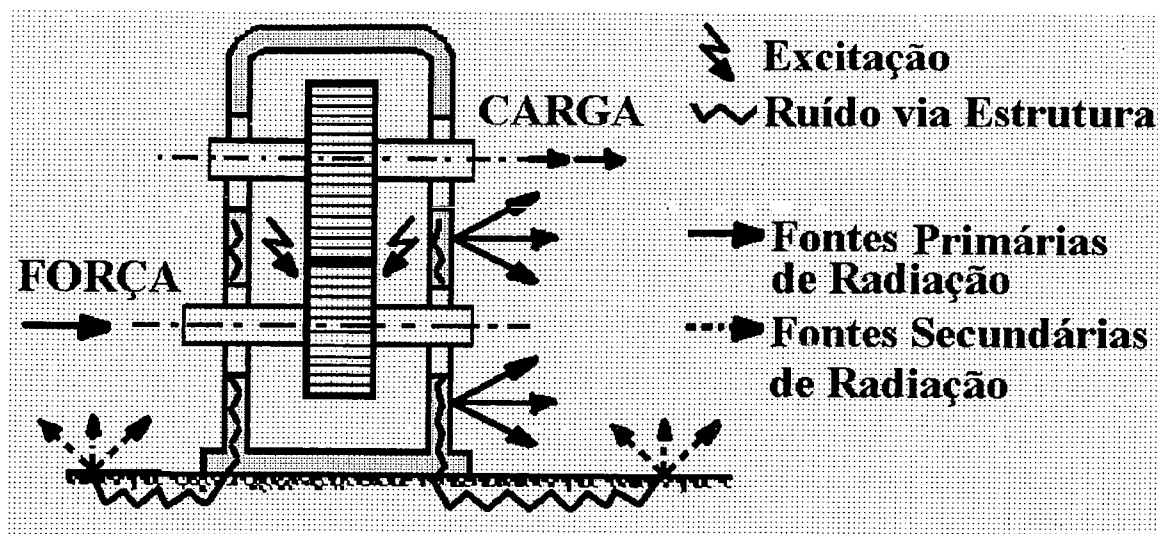


Figura 1.5 – Mecanismo de geração de ruído [24].

Na maioria dos casos, a radiação de ruído da caixa de engrenagem é devida às vibrações de flexão das paredes do alojamento, cuja característica de movimento é mostrada na Fig. 1.6.

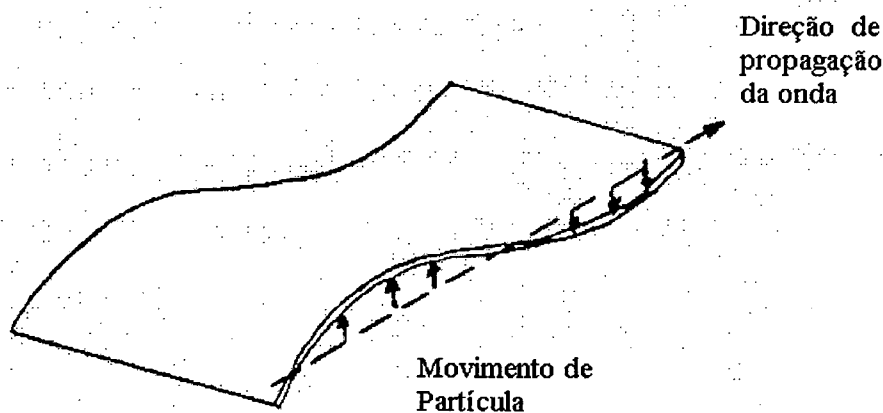


Figura 1.6 – Característica do movimento ondulatório do alojamento.

Ishida, Matsuda e Fukui [31] estudaram a transmissão da energia de vibração em uma caixa de engrenagem automobilística examinando os espectros de frequência de aceleração e ruído em várias posições da caixa de engrenagem e em sua vizinhança. Um esquema das trajetórias de transmissão de vibração e ruído foi desenvolvido e é mostrado na Figura 1.7. Neste estudo foi constatado que mais de 95 % do ruído total da caixa de engrenagem procedia de trajetórias de transporte via estrutura. Esta alta contribuição do ruído transportado via estrutura é devida ao fato de que a maior parte do ruído gerado pelas engrenagens acopladas e transportado

pelo ar foi reduzido pelo alojamento. Este tipo de comportamento está de acordo com estudos feito por Brandal e Rust [5], que investigando as possibilidades da utilização de parâmetros secundários para o tratamento de *Rattle* de engrenagem, levantaram a questão de qual seria a contribuição mais significativa para o ruído radiado da caixa de engrenagem se o ruído transportado pelo ar ou via estrutura. Para encontrar uma resposta a esta indagação Brandal e Rust, determinaram a Perda de Inserção do alojamento experimentalmente, usando um alto-falante dentro da caixa de engrenagem. Uma Perda de Inserção muito alta foi medida comprovando, desta forma, que a contribuição do som gerado no engrenamento e transportado pelo ar pode ser negligenciado. Relatam, ainda, que em uma velocidade do motor de 1500 rpm, a plena carga e em quarta marcha, mais do que 99 % da potência sonora total sendo radiada pela superfície da transmissão originou-se da componente de vibração estrutural.

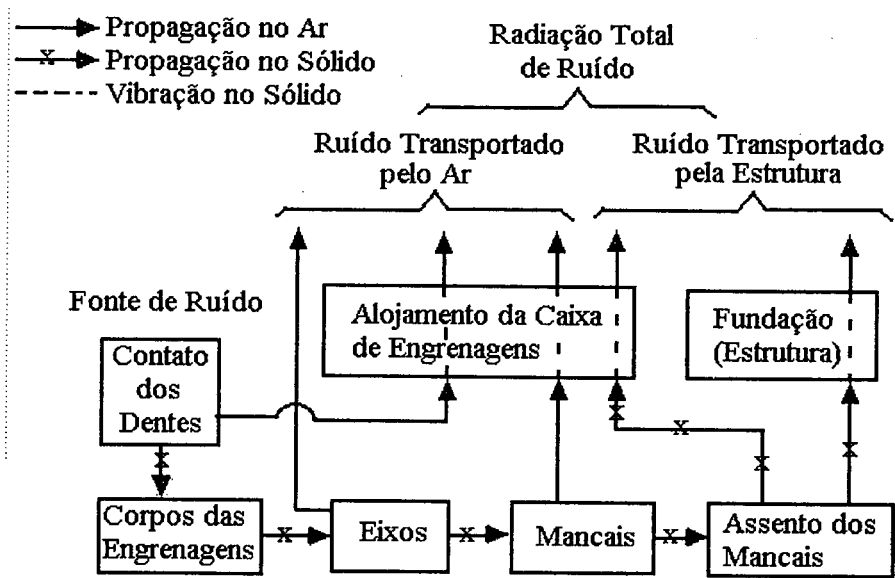


Figura 1.7 – Trajetória de transmissão de vibração e ruído em uma caixa de engrenagem de uso veicular [31].

1.4 – MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS DO TRABALHO

Desde 1960, numerosos esforços de pesquisa têm sido desenvolvidos para modelar analítica e experimentalmente a dinâmica da caixa de engrenagem. As metodologias analíticas e experimentais vêm sendo aplicadas extensivamente para modelar a dinâmica de sistemas de transmissão por engrenagens. Entretanto, a maior parte dos modelos de predição de ruído de

caixa de engrenagem têm sido de natureza semi-empírica, devido à complexidade do mecanismo de geração de ruído e o fato de que, neste particular, foram realizados muitos programas experimentais para caracterizar o campo de ruído. A proposta destes resultados era a de prever e controlar a vibração e radiação de ruído da caixa de engrenagem.

Lim e Singh em 1989 [51], elaboraram, para o *Lewis Research Center* da NASA, uma revisão da literatura disponível em vibração e radiação de ruído de alojamento da caixa de engrenagem, na qual algumas metodologias analíticas e experimentais usadas para modelagem de mancais, ruído e vibração de alojamento, montagens e suspensões são apresentadas, incluindo ainda diretrizes típicas de projeto recomendadas por vários pesquisadores. Os resultados desta revisão indicaram que embora muitas tentativas tenham sido feitas para caracterizar a dinâmica dos componentes de uma caixa de engrenagem, não existe ainda um conjunto compreensivo de critérios de projeto, bem como aponta para a existência, na literatura, de informações conflitantes a respeito de diretrizes de projeto relevantes.

O procedimento tradicional para a obtenção da redução de ruído em sistemas mecânicos complexos é caracterizado pelas seguintes etapas: medição do ruído radiado pelo sistema mecânico, reprojetado do sistema e medição do ruído radiado com as modificações de projeto. Este procedimento é feito de modo contínuo até que se tenha alcançado níveis de redução de ruído dentro dos valores esperados. Como consequência, esta técnica consome um tempo elevado e limita as ações dos projetistas a pequenas mudanças no projeto original, de modo a evitar o custo excessivo associado às etapas deste procedimento.

As desvantagens do método tradicional, relacionadas no parágrafo anterior, enfatizam a necessidade de se avaliarem projetos novos de sistemas mecânicos de uma forma eficiente, preferencialmente antes até da primeira fabricação do sistema.

Soluções matemáticas exatas para o problema de radiação de uma fonte sonora, sofrendo movimento oscilatório em suas superfícies, estão limitadas a radiadores simples e ideais tais como esfera pulsante (monopolo), esfera vibrante (dipolo) ou um radiador de pistão [24]. Para alguns sistemas simples, estes modelos matemáticos podem ser uma ferramenta útil de predição, entretanto, para sistemas complexos como caixa de engrenagem o uso destes modelos é difícil de se justificar com base na geometria aparente de seu alojamento e ficou claro, com base no trabalho desenvolvido por Jacobson [34], que todos eles falham em prever as variações que estão presente nas curvas de eficiência de radiação obtidas a partir de medições *in-situ*.

Com o avanço tecnológico e a chegada de computadores cada vez mais potentes, bem como a disponibilidade de uma grande variedade de técnicas computacionais, tornou-se possível a solução de problemas de engenharia mais complexos. Assim, os critérios acústicos do projeto já podem ser considerados ainda na fase inicial de projeto utilizando-se a simulação numérica.

Neste trabalho, o objetivo geral é a modelagem global de caixas de engrenagem de uso veicular, tendo por base os métodos de elementos finitos e elementos de contorno. O enfoque principal é para as vibrações e ruídos transportados pela estrutura e que têm como origem a excitação provocada pelo engrenamento, de modo a permitir a predição de parâmetros vibro-acústicos em um tempo relativamente curto e com custos inferiores àqueles relacionados ao método tradicional de abordagem deste tipo de problema.

Para atender ao objetivo geral acima descrito, os seguintes objetivos específicos deverão ser alcançados:

1. Desenvolvimento analítico e numérico para a modelagem tridimensional de mancais de rolamento de esferas e de rolos, de modo a se obter uma matriz de rigidez generalizada para ser agregada em modelos de elementos finitos.
2. Representação matricial do engrenamento visando simular o acoplamento entre as vibrações torcionais e de flexão do sistema de eixos engrenados, bem como a incorporação deste acoplamento em modelos de elementos finitos.
3. Desenvolvimento do modelo numérico do sistema de eixos engrenados visando estimar as reações nos mancais causadas pela auto excitação imposta pelo engrenamento, bem como permitir estabelecer a influência da modificação do perfil dos dentes das engrenagens.
4. Concepção e criação de uma malha de elementos finitos para representação do alojamento de uma caixa de engrenagem, bem como a malha acústica correspondente a ser usada na estimativa dos parâmetros acústicos, tendo por base o método de elementos de contorno.

Por outro lado, devido ao tempo necessário para o desenvolvimento de um código computacional e à disponibilidade de uma quantidade significativa de programas de simulação numérica, que permitem a utilização dos métodos de elementos finitos e elementos de contorno, para a simulação dos problemas de vibração e acústica, optou-se pela utilização de programas comerciais neste trabalho. Assim, os programas ANSYS e SYSNOISE foram os escolhidos

devido a alta qualidade e grande aceitação destes produtos por parte do setor industrial e de grupos acadêmicos de pesquisa a nível internacional.

Finalmente, as técnicas e metodologias apresentadas são usadas para permitir a estimativa de parâmetros vibro-acústicos de uma caixa de engrenagem real. Esta caixa de engrenagem foi fabricada pela Eaton do Brasil (antiga CLARK) e foi o fruto de uma pesquisa detalhada de avaliação de produtos disponíveis no mercado e do grau de satisfação dos proprietários de PICK-UPS, com relação a estes produtos. Na pesquisa foram ouvidos montadoras, concessionárias, frotistas e usuários, no Brasil, Europa e Estados Unidos. O resultado é uma caixa de engrenagem automotiva de 490,5 N (50 kgf) de peso, com 5 (cinco) velocidades à frente e 1 (uma) a ré, todas sincronizadas, que destina-se a veículos comerciais leves, com peso bruto total de 3,9 ton e motores até 420 N.m de torque líquido. A Fig. 1.8 mostra uma vista lateral da caixa de engrenagem, que permite uma visualização dos componentes internos, e a tabela 1.1 lista as relações de transmissão por ela fornecida.

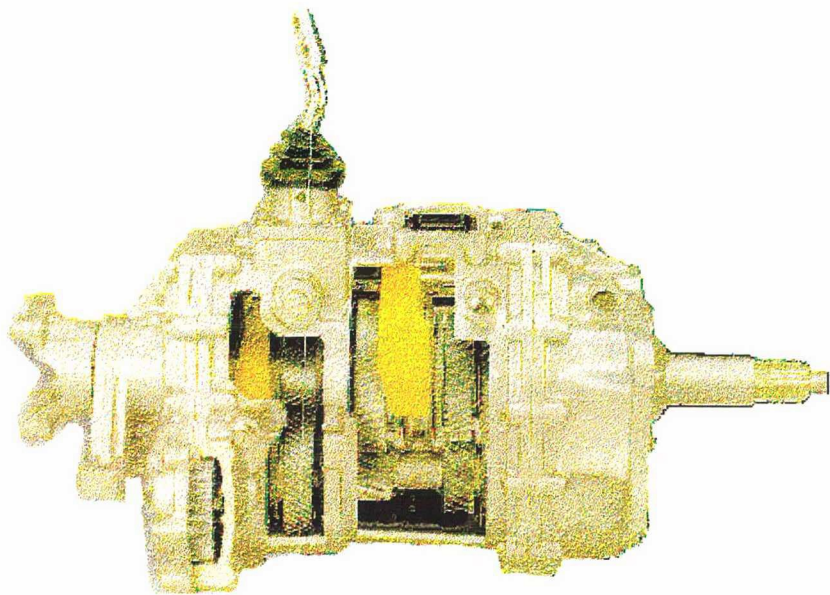


Figura 1.8 – Caixa de engrenagem de uso veicular.

Tabela 1.1 - Reduções de velocidade da caixa de engrenagem.

| VELOCIDADE | 1ª Marcha | 2ª Marcha | 3ª Marcha | 4ª Marcha | 5ª Marcha | Ré      |
|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|---------|
| REDUÇÃO    | 4,079:1   | 2,289:1   | 1,472:1   | 1,000:1   | 0,809:1   | 3,722:1 |

## **1.5 – ESTRUTURA DO TRABALHO**

A descrição das etapas do trabalho, seu desenvolvimento teórico e experimental, conclusões e recomendações são organizadas e apresentadas num total de oito capítulos.

No Capítulo 2 é apresentada uma revisão da literatura sobre modelos de mancais e o desenvolvimento analítico e numérico de modelagem de mancais de rolamento de esferas e de rolos, que permite levar em conta as deflexões radiais, axial e angular, de modo a obter-se uma matriz de rigidez generalizada que pode ser incorporada em modelos de elementos finitos. Os resultados, baseados na aplicação deste desenvolvimento à caixa de engrenagem real, são apresentados e discutidos.

O Capítulo 3 contém uma revisão da literatura, que permite uma visão geral dos modelos matemáticos propostos para representar o engrenamento, e apresenta uma abordagem ampliada de um modelo simples que permite simular o acoplamento das vibrações torcionais e de flexão. Os parâmetros rigidez de engrenamento e erro de transmissão, que fazem parte do modelo do engrenamento, são determinados para os pares de engrenagem que fazem parte da caixa de engrenagem, assumindo-se as formas padrão e modificada para o perfil dos dentes das engrenagens.

No Capítulo 4 o sistema de eixos engrenados é modelado usando o método de elementos finitos e incorporando as matrizes de rigidez que representam os mancais de rolamento e os engrenamentos. Dois modelos são construídos, para as condições de operação de primeira e de terceira marcha da caixa de engrenagem, e os resultados de uma análise modal e de vibrações forçadas são apresentados, dando-se ênfase as reações de mancais que são consequência do erro de engrenamento estático.

A definição do modelo numérico do alojamento é feita no Capítulo 5. Neste capítulo, é apresentado um método de estimativa do tamanho do elemento finito da malha que representa o alojamento e os resultados numéricos são validados a partir de uma análise modal experimental do alojamento.

O Capítulo 6 apresenta uma validação da metodologia de estimativa dos parâmetros vibro-acústicos, com base nos métodos de elementos finitos e elementos de contorno, e dos pacotes comerciais usados neste trabalho, usando a abordagem teórica disponível para uma placa plana como base de referência. Esta metodologia é aplicada ao alojamento da caixa de engrenagem para

a estimativa da eficiência de radiação modal e uma malha acústica representativa da caixa de engrenagem é obtida.

No capítulo 7 é descrito o modelo global da caixa de engrenagem e uma estimativa dos parâmetros vibro-acústicos é realizada. Os resultados obtidos para condições de operação distintas são apresentados e comentados.

As conclusões e sugestões para prosseguimento deste primeiro trabalho de pesquisa na área de vibro-acústica veicular, no que diz respeito à dinâmica e acústica de caixas de engrenagem, são apresentadas no Capítulo 8.

Finalmente, no item de Referências Bibliográficas, são listados os artigos e obras consultadas que deram sustentação ao desenvolvimento deste trabalho.



## **CAPÍTULO 2**

### **MODELAGEM DE MANCAIS DE ROLAMENTO**

#### **2.1 - INTRODUÇÃO**

As vibrações em máquinas rotativas têm sido um dos principais obstáculos ao aumento de suas rotações e desempenho. Como tal, o tema têm sido objeto de muitas pesquisas e conferências internacionais. Procedimentos de cálculo sofisticados foram desenvolvidos, os quais permitem a inclusão das características do eixo, mancais de rolamento ou deslizamento e alojamento, com o objetivo de se prever o comportamento vibratório dos sistemas sob estudo. As características do eixo e do alojamento foram largamente pesquisadas e podem ser descritas com confiança e economia aceitável pelos modelos matemáticos estabelecidos. O mancal, contudo, é modelado com muito menos rigor e, freqüentemente, representa a maior fonte de dúvida na predição, o que é particularmente verdade para mancais de elementos rolantes.

Para o caso de sistemas de transmissão constituídos por engrenagens helicoidais, que produzem reações de momento e cargas radial e axial sobre os mancais, os modelos simplificados dos mancais de rolamento não são adequados para uso, uma vez que eles são incapazes de simular de forma correta a transmissão de forças e momentos advindas do engrenamento. Assim, o objetivo deste capítulo é apresentar o desenvolvimento analítico e numérico para se modelarem os mancais de rolamento de modo que, além das deflexões radial e axial, se leve em conta o efeito da deflexão angular do eixo. Esta abordagem é aplicada ao sistema de eixos engrenados, da caixa de engrenagem de uso veicular, e as matrizes de rigidez dos mancais de rolamentos, para incorporação no modelo de elementos finitos, como elementos de rigidez generalizada, são obtidas.

#### **2.2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

Os primeiros estudos desenvolvidos, no passado, estavam relacionados a mancais submetidos a cargas radial e/ou axial. Palmgren [72] desenvolveu expressões que relacionam as deformações elásticas do rolamento de esfera e de rolo com a carga máxima num elemento rolante. Essas relações estão entre as primeiras representações analíticas de rolamentos sob cargas radial e/ou axial e são muito usadas em outros trabalhos.

Jones [36] apresentou uma teoria que permite a determinação das constantes de rigidez de rolamentos de rolo radial e de esfera, sob condições arbitrárias de velocidade e carga, levando em conta os efeitos de carregamento centrífugo e giroscópico dos elementos rolantes.

Harris [25] apresentou um número de arranjos de carregamentos nos rolamentos e usou as equações de força estática, juntamente com as relações carga deflexão que são função da distribuição de carga no rolamento. A determinação da rigidez do rolamento teve por base as fórmulas de Palmgren para rolamentos com carga radial ou axial.

While [99] usou a análise de mancal de Harris [25] para estudar um modelo dinâmico de dois graus de liberdade. While [99] representou os rolamentos como molas e amortecedores, o eixo como uma massa concentrada e o alojamento como uma massa concentrada e amortecedor. Em sua análise, ele considerou somente o movimento radial dos rolamentos de esfera e rolo.

Rajab [74] propôs um modelo analítico que assume o rolamento submetido a carga radial e momento de flexão. O modelo consiste de rigidez radial e rigidez axial acoplada obtidas a partir da relação carga-deflexão para rolamentos sob carga. O sistema de rolamentos e eixo representa um sistema indeterminado que deve ser analisado para as cargas e deflexões usando as relações carga-deflexão do rolamento e do eixo.

Alguns trabalhos experimentais foram também desenvolvidos, entretanto, a determinação experimental dos coeficientes de rigidez dos rolamentos foi limitada aos coeficientes de rigidez na direção radial e axial. Dentro dessa linha de pesquisa, Walford e Stone [96] apresentaram a descrição de um dispositivo usado na medição da rigidez radial de um par de rolamentos de contato angular sob condições de oscilação. O objetivo foi de simular condições controladas de rotação, pré-carga e ajuste do eixo e alojamento.

Kraus et al [39] apresentaram um método para extração das características de rigidez e amortecimento de rolamento sob condições de operação. O método é baseado na análise modal experimental combinado com o modelo matemático de um sistema de um grau de liberdade, que foi usado para a investigação do efeito da velocidade e pré-carga sobre a rigidez e amortecimento do sistema. Os resultados de sua análise mostram que os coeficientes de rigidez radial e axial apresentam comportamento linear e que o efeito da velocidade de rotação do sistema é negligenciável para valores altos de pré-carga.

Neste trabalho é desenvolvido um modelo de mancal de rolamento que se baseia no artigo de Jones [36] e em informações obtidas na referência [25], de modo que são negligenciados os efeitos de força centrífuga e do momento giroscópico sobre os elementos rolantes. Este modelo guarda semelhança com o modelo posteriormente encontrado no artigo de

Lim e Singh [52]. A diferença básica entre os modelos está na forma de se posicionarem os elementos rolantes, ou seja, nosso desenvolvimento toma como referência para medição do ângulo que posiciona os elementos rolantes o eixo Y do sistema de coordenada usado e o sentido horário enquanto que, no artigo de Lim e Singh [52], é usado o eixo X e o sentido anti-horário.

### 2.3 - DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

As cargas que atuam sobre os rolamentos de esferas e de rolos são transmitidas através dos elementos rolantes de um anel para o outro. A magnitude do carregamento suportado por uma esfera ou rolo, de forma individual, depende da geometria do rolamento e do tipo de carga que atua sobre ele. Em adição ao carregamento aplicado, os elementos rolantes são submetidos a carregamento dinâmico, devido a efeitos de velocidade, representado por forças centrífugas e momentos giroscópicos.

Em rolamentos de esferas, os momentos giroscópicos e forças centrífugas da esfera podem ser de magnitude significativa tal que os ângulos de contato das pistas dos anéis interno ( $\beta_i$ ) e externo ( $\beta_e$ ) tendem a aumentar e diminuir respectivamente, conforme mostrado na Fig. 2.1, provocando a modificação das características de carga-deflexão do rolamento e, por extensão, a modificação das suas características de rigidez. Neste contexto, o modelo de rolamento de elementos rolantes proposto por Jones [36], que está baseado em uma teoria geral para rolamentos de esfera e de rolo, sob condição de velocidade e carga arbitrária, assume um papel importante em qualquer estudo de rolamentos. Entretanto, resultados de uma simulação computacional realizada para um rolamento de esfera, com ângulo de contato sem carga  $\beta_0 = 40^\circ$ , submetido a carga axial variando na faixa de 0 a 44.500 N e valores de velocidade de rotação de 3.000, 6.000, 10.000 e 15.000 rpm, apresentados nas Fig. 2.2 e 2.3, como uma relação entre a rigidez radial em condições de carga-velocidade ( $k_r$ ) e aquela em condições estática ( $k_{st}$ ), mostram que a alteração dos valores de rigidez somente é significativa para valores de rotação acima de 10.000 rpm.

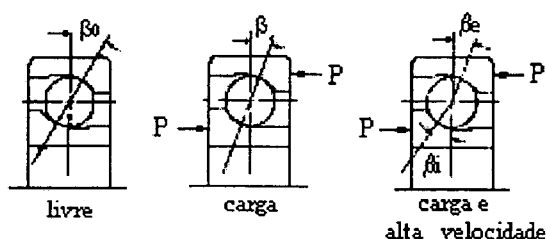


Figura 2.1 – Mudança do ângulo de contato devido a carga e velocidade [25].

Com base no acima exposto, neste trabalho, uma simplificação do modelo de Jones [36] é proposta considerando-se negligenciáveis a força centrífuga e o momento giroscópico, que atuam em cada elemento rolante, uma vez que esses efeitos são evidentes somente em velocidades de rotação altas. Por outro lado, é assumido que a posição angular de cada elemento rolante, relativa a qualquer outro elemento, permanece inalterada devido a presença da gaiola e e pinos rígidos existentes nos rolamentos e é dada pelo ângulo  $\psi$ , conforme Fig. 2.4.

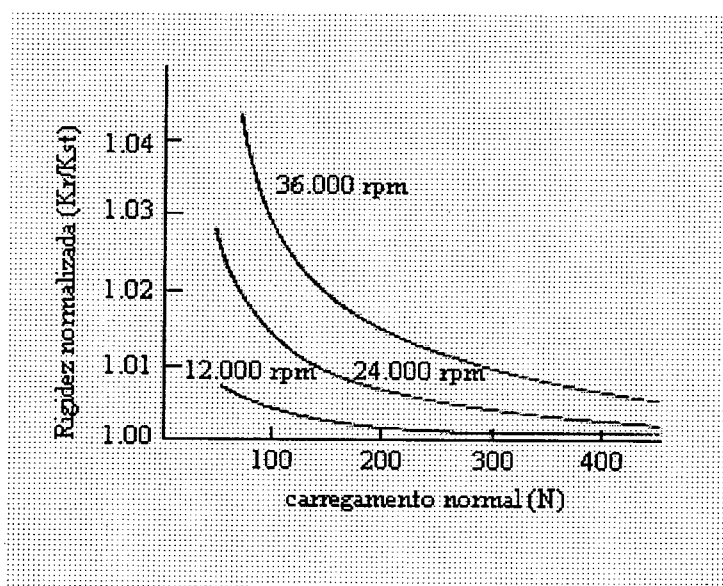


Figura 2.2 – Efeito de carga e velocidade sobre a rigidez radial do rolamento [25].

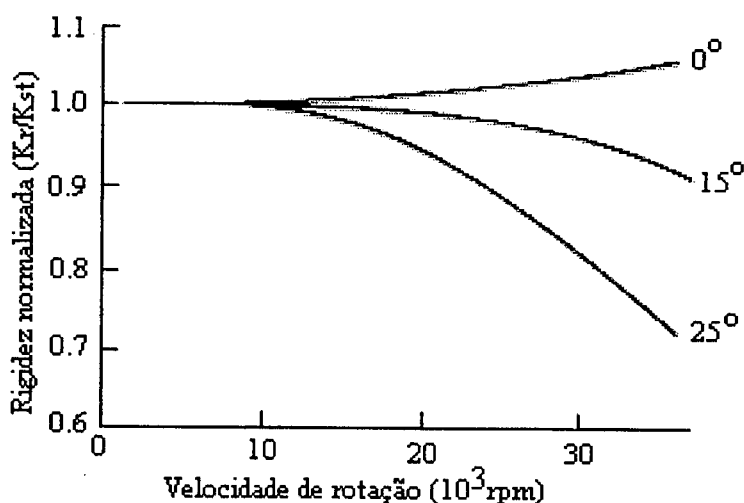


Figura 2.3 – Efeito do ângulo de contato e velocidade sobre a rigidez radial [25].

O objetivo da análise é a obtenção de uma matriz de coeficientes de rigidez  $K_m$ , para rolamentos de esfera e de rolo, que possa ser incorporada a modelos numéricos ou analíticos usados na análise dinâmica. Nesta análise, os coeficientes de rigidez são obtidos como função das características cinemáticas e parâmetros de projeto de cada tipo de rolamento, tais como: ângulo de contato sem carga ( $\beta_0$ ), folga radial ( $r_L$ ), número de elementos rolantes ( $Z$ ) e constante carga-deflexão ( $K_{cd}$ ), para os rolamentos de esfera e rolo; fator de curvatura total ( $B$ ), diâmetro do elemento rolante ( $d$ ), raio do centro de curvatura da pista do anel interno ( $r$ ), para o rolamento de esfera; raio do círculo primitivo ( $r$ ), para rolamento de rolo.

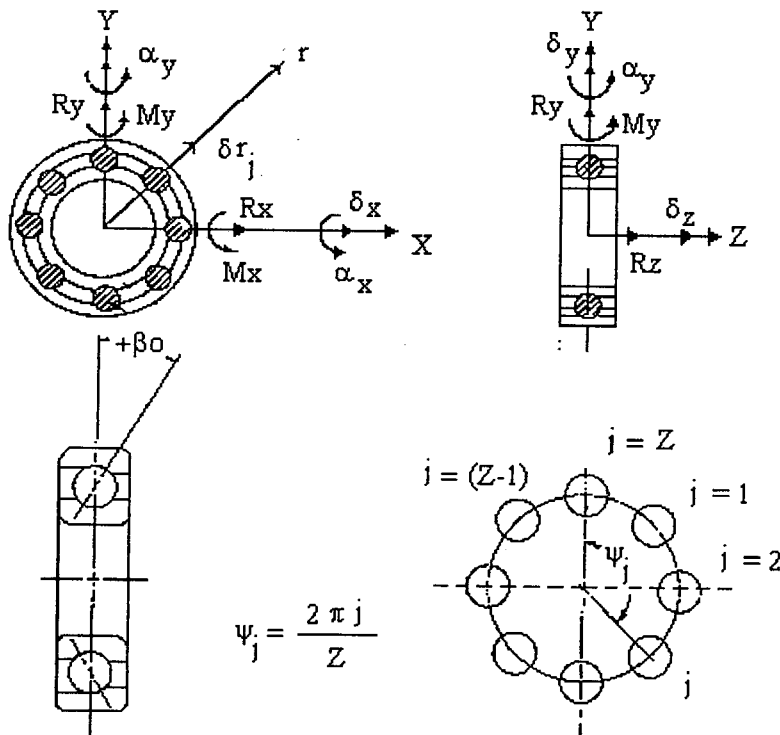


Figura 2.4 – Sistema de coordenadas e posição dos elementos rolantes [36] e [52].

### 2.3.1 - Relação Carga-Deflexão nos Rolamentos de Esfera e de Rolo

Os deslocamentos de translação ( $\delta_i$ ) e de rotação ( $\alpha_j$ ), conforme Fig. 2.4, com  $i = x, y, z$  e  $j = x, y$ , são deslocamentos médios do rolamento, dados pelos movimentos relativos de corpo rígido entre os anéis interno e externo, e são na realidade uma parcela do deslocamento total a que fica submetido o rolamento, uma vez que existe uma outra parcela de deslocamento que corresponde à variação em torno do valor médio durante a rotação em regime, o que leva a uma variação temporal dos coeficientes de rigidez. Entretanto, em nossa abordagem, esta parcela de

deslocamento é negligenciada, devido à hipótese de pequenos deslocamentos provocados pelo movimento vibratório e, conseqüentemente, os coeficientes de rigidez da matriz  $\mathbf{K}_m$  são invariantes no tempo e dependentes das cargas e deslocamentos médios.

A relação carga-deflexão básica, para cada elemento rolante elástico, é definida pela teoria da tensão de contato de Hertz como [36]:

$$P_j = K_{cd} \Delta_j^n \quad (2.1)$$

onde  $P_j$  é a carga normal resultante no  $j$ -ésimo elemento rolante,  $K_{cd}$  é a constante carga-deflexão para o contato pista interna-elemento rolante-pista externa, cuja formulação matemática é apresentada no Anexo 1, e  $n$  uma constante, que para o caso de rolamento de esfera assume o valor de  $3/2$  e para rolamento de rolo  $10/9$ .

A partir da Fig. 2.5, pode-se estabelecer a deformação do  $j$ -ésimo elemento rolante, para os rolamentos de esfera (Eq. (2.2)) e de rolo (Eq. (2.4)), como:

$$\Delta_j = \begin{cases} \delta_E(\psi_j) & , \delta_E(\psi_j) > 0 \\ 0 & , \delta_E(\psi_j) \leq 0 \end{cases}; \quad \delta_E(\psi_j) = A_j - Bd \quad (2.2)$$

$$Ar_j = Bd \cos \beta_0 + \delta r_j; \quad Aa_j = Bd \sin \beta_0 + \delta a_j; \quad A_j = \sqrt{Ar_j^2 + Aa_j^2} \quad (2.3)$$

$$\delta r_j = \delta_y \cos \psi_j + \delta_x \sin \psi_j - r_L; \quad \delta a_j = \delta_z + r(\alpha_x \cos \psi_j - \alpha_y \sin \psi_j)$$

$$\Delta_j = \begin{cases} \delta_R(\psi_j) & , \delta_R(\psi_j) > 0 \\ 0 & , \delta_R(\psi_j) \leq 0 \end{cases}; \quad \delta_R(\psi_j) = \delta r_j \cos \beta_0 + \delta a_j \sin \beta_0 \quad (2.4)$$

em que  $\delta_E(\psi_j) \leq 0$  e  $\delta_R(\psi_j) \leq 0$ , nas Eq. (2.2) e (2.4) respectivamente, implicam na ausência de tensão no  $j$ -ésimo elemento rolante e  $\delta r_j$  e  $\delta a_j$  são os deslocamentos na direção radial e axial respectivamente.

O fator de curvatura total ( $B$ ), usado nas Eq. (2.2) e (2.3), é dado por [25]:

$$B = \frac{r_e}{d} + \frac{r_i}{d} - 1 \quad (2.5)$$

onde  $r_e$  e  $r_i$  são, respectivamente, os raios de curvatura da pista dos anéis externo e interno.

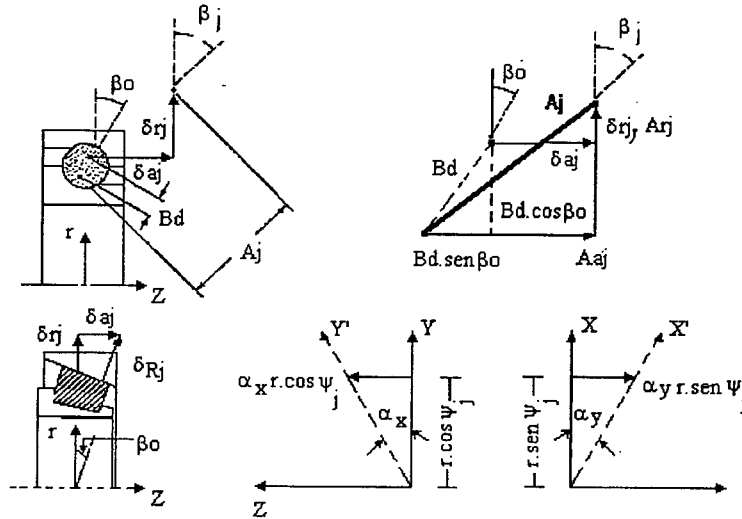


Figura 2.5 – Deformação elástica do elemento rolante.

A matriz de rigidez do rolamento  $K_m$  depende da relação entre o vetor de carga média resultante que atua no rolamento e o respectivo vetor de deslocamento. Esta relação pode ser obtida, tendo por base o sistema de referência apresentado na Fig. 2.6, através da soma vetorial de  $P_j$ , dado pela Eq.(2.1), para todos os elementos rolantes carregados, levando-nos às seguintes expressões para as forças e momentos no rolamento:

$$R_x = \sum_{j=1}^Z P_j \cos \beta_j \sin \psi_j \quad (2.6)$$

$$R_y = \sum_{j=1}^Z P_j \cos \beta_j \cos \psi_j \quad (2.7)$$

$$R_z = \sum_{j=1}^Z P_j \sin \beta_j \quad (2.8)$$

$$M_x = \sum_{j=1}^Z r P_j \sin \beta_j \sin \psi_j \quad (2.9)$$

$$M_y = - \sum_{j=1}^Z r P_j \sin \beta_j \cos \psi_j \quad (2.10)$$

O momento resultante  $M_z$  é nulo devido ao eixo montado no rolamento ser livre para realizar movimento de rotação em torno do eixo coordenado Z.

O ângulo de contato com carga  $\beta_j$ , que aparece nas Eq. (2.6) a (2.10), para o caso de rolamento de rolo, permanece relativamente constante e é assumido ser igual ao ângulo de contato sem carga  $\beta_0$ . Por outro lado, para os rolamentos de esfera,  $\beta_j$  pode variar de modo significativo e, neste caso, seu valor é dado por:

$$\beta_j = \arctg \left( \frac{Bd \sin \beta_0 + \delta a_j}{Bd \cos \beta_0 + \delta r_j} \right) \quad (2.11)$$

com a seguinte convenção de sinal: positivo quando medido do plano X – Y para o eixo axial Z e negativo em caso contrário, conforme mostrado na Fig. 2.4.

### 2.3.2 - Matriz de Rigidez do Mancal de Rolamento

Devido à relação carga-deflexão para o rolamento, obtida a partir da teoria de contato de Hertz, ser não linear, os coeficientes de rigidez do rolamento são linearizados [25], como mostrado na Fig. 2.7, tomando a tangente à curva carga-deflexão próxima ao ponto de equilíbrio estático. Desta forma, os coeficientes da matriz de rigidez do rolamento são obtidos através do cômputo das derivadas parciais das Eq. (2.6) a (2.10), o que fornece:

$$\mathbf{K}_m = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_i}{\partial \delta_j} & \frac{\partial R_i}{\partial \alpha_j} \\ \frac{\partial M_i}{\partial \delta_j} & \frac{\partial M_i}{\partial \alpha_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} & k_{x\alpha_x} & k_{x\alpha_y} & k_{x\alpha_z} \\ & k_{yy} & k_{yz} & k_{y\alpha_x} & k_{y\alpha_y} & k_{y\alpha_z} \\ & & k_{zz} & k_{z\alpha_x} & k_{z\alpha_y} & k_{z\alpha_z} \\ & & & k_{\alpha_x\alpha_x} & k_{\alpha_x\alpha_y} & k_{\alpha_x\alpha_z} \\ & \text{Simétrica} & & & k_{\alpha_y\alpha_y} & k_{\alpha_y\alpha_z} \\ & & & & & k_{\alpha_z\alpha_z} \end{bmatrix} \quad i,j=x,y,z \quad (2.12)$$

As expressões explícitas dos coeficientes  $k_{ij}$ , para rolamento de esfera, são:

$$k_{xx} = K_{cd} \sum_{j=1}^Z T_j^{(1)} \sin^2 \psi_j \quad (2.13)$$



$$k_{xy} = K_{cd} \sum_{j=1}^Z T_j^{(1)} \sin \psi_j \cos \psi_j \quad (2.14)$$

$$k_{xz} = K_{cd} \sum_{j=1}^Z T_j^{(2)} A_{rj} A_{aj} \sin \psi_j \quad (2.15)$$

$$k_{x\alpha_x} = K_{cd} \sum_{j=1}^Z T_j^{(2)} A_{rj} A_{aj} r \sin \psi_j \cos \psi_j \quad (2.16)$$

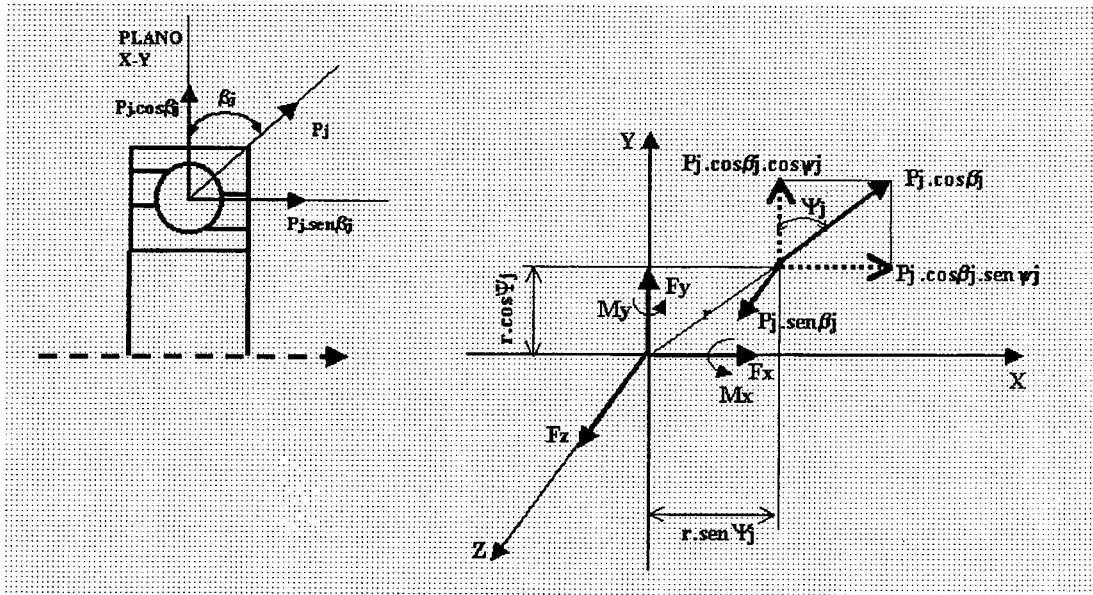


Figura 2.6 – Sistema de referência e diagrama de carga do elemento rolante.

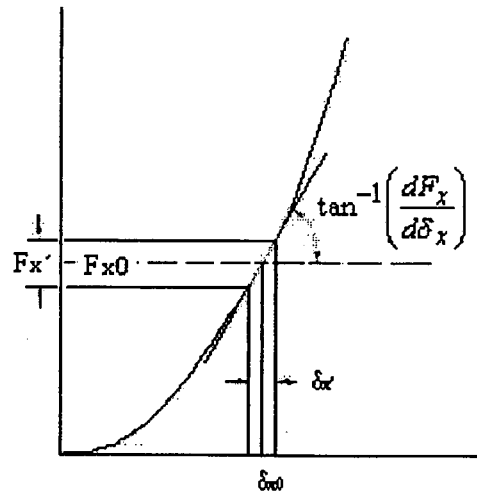


Figura 2.7 – Método de linearização para cálculo da rigidez do mancal [25].

$$k_{x\alpha_y} = -K_{cd} \sum_{j=1}^Z T_j^{(2)} Ar_j Aa_j r \sin^2 \psi_j \quad (2.17)$$

$$k_{yy} = K_{cd} \sum_{j=1}^Z T_j^{(1)} \cos^2 \psi_j \quad (2.18)$$

$$k_{yz} = K_{cd} \sum_{j=1}^Z T_j^{(2)} Ar_j Aa_j \cos \psi_j \quad (2.19)$$

$$k_{y\alpha_x} = K_{cd} \sum_{j=1}^Z T_j^{(2)} Ar_j Aa_j r \cos^2 \psi_j \quad (2.20)$$

$$k_{y\alpha_y} = -K_{cd} \sum_{j=1}^Z T_j^{(2)} Ar_j Aa_j r \cos \psi_j \sin \psi_j \quad (2.21)$$

$$k_{zz} = K_{cd} \sum_{j=1}^Z T_j^{(3)} \quad (2.22)$$

$$k_{z\alpha_x} = K_{cd} \sum_{j=1}^Z T_j^{(3)} r \cos \psi_j \quad (2.23)$$

$$k_{z\alpha_y} = -K_{cd} \sum_{j=1}^Z T_j^{(3)} r \sin \psi_j \quad (2.24)$$

$$k_{\alpha_x\alpha_x} = K_{cd} \sum_{j=1}^Z T_j^{(3)} r^2 \cos^2 \psi_j \quad (2.25)$$

$$k_{\alpha_x\alpha_y} = -K_{cd} \sum_{j=1}^Z T_j^{(3)} r^2 \sin \psi_j \cos \psi_j \quad (2.26)$$

$$k_{\alpha_y\alpha_y} = K_{cd} \sum_{j=1}^Z T_j^{(3)} r^2 \sin^2 \psi_j \quad (2.27)$$

onde:

$$T_j^{(1)} = \frac{\delta_E^n(\psi_j) \left\{ \frac{nAr_j^2 A_j}{\delta_E(\psi_j)} + A_j^2 - Ar_j^2 \right\}}{A_j^3} \quad (2.28)$$

$$T_j^{(2)} = \frac{\delta_E^n(\psi_j) \left\{ \frac{nA_j}{\delta_E(\psi_j)} - 1 \right\}}{A_j^3} \quad (2.29)$$

$$T_j^{(3)} = \frac{\delta_E^n(\psi_j) \left\{ \frac{nAa_j^2 A_j}{\delta_E(\psi_j)} + A_j^2 - Aa_j^2 \right\}}{A_j^3} \quad (2.30)$$

e para rolamento de rolo:

$$k_{xx} = nK_{cd} \cos^2 \beta_0 \sum_{j=1}^Z \delta_R^{n-1}(\psi_j) \sin^2 \psi_j \quad (2.31)$$

$$k_{xy} = 0,5nK_{cd} \cos^2 \beta_0 \sum_{j=1}^Z \delta_R^{n-1}(\psi_j) \sin 2\psi_j \quad (2.32)$$

$$k_{xz} = 0,5nK_{cd} \sin 2\beta_0 \sum_{j=1}^Z \delta_R^{n-1}(\psi_j) \sin \psi_j \quad (2.33)$$

$$k_{x\alpha_x} = 0,25nrK_{cd} \sin 2\beta_0 \sum_{j=1}^Z \delta_R^{n-1}(\psi_j) \sin 2\psi_j \quad (2.34)$$

$$k_{x\alpha_y} = -0,5nrK_{cd} \sin 2\beta_0 \sum_{j=1}^Z \delta_R^{n-1}(\psi_j) \sin^2 \psi_j \quad (2.35)$$

$$k_{yy} = nK_{cd} \cos^2 \beta_0 \sum_{j=1}^Z \delta_R^{n-1}(\psi_j) \cos^2 \psi_j \quad (2.36)$$

$$k_{yz} = 0,5nK_{cd} \sin 2\beta_0 \sum_{j=1}^Z \delta_R^{n-1}(\psi_j) \cos \psi_j \quad (2.37)$$

$$k_{y\alpha_x} = 0,5nrK_{cd} \sin 2\beta_0 \sum_{j=1}^Z \delta_R^{n-1}(\psi_j) \cos^2 \psi_j \quad (2.38)$$

$$k_{y\alpha_y} = -0,25nrK_{cd} \sin 2\beta_0 \sum_{j=1}^Z \delta_R^{n-1}(\psi_j) \sin 2\psi_j \quad (2.39)$$

$$k_{zz} = nK_{cd} \sin^2 \beta_0 \sum_{j=1}^Z \delta_R^{n-1}(\psi_j) \quad (2.40)$$

$$k_{z\alpha_x} = nrK_{cd} \sin^2 \beta_0 \sum_{j=1}^Z \delta_R^{n-1}(\psi_j) \cos \psi_j \quad (2.41)$$

$$k_{z\alpha_y} = -nrK_{cd} \sin^2 \beta_0 \sum_{j=1}^Z \delta_R^{n-1}(\psi_j) \sin \psi_j \quad (2.42)$$

$$k_{\alpha_x\alpha_x} = nr^2 K_{cd} \sin^2 \beta_0 \sum_{j=1}^Z \delta_R^{n-1}(\psi_j) \cos^2 \psi_j \quad (2.43)$$

$$k_{\alpha_x\alpha_y} = -0,5nr^2 K_{cd} \sin^2 \beta_0 \sum_{j=1}^Z \delta_R^{n-1}(\psi_j) \sin 2\psi_j \quad (2.44)$$

$$k_{\alpha_y\alpha_y} = nr^2 K_{cd} \sin^2 \beta_0 \sum_{j=1}^Z \delta_R^{n-1}(\psi_j) \sin^2 \psi_j \quad (2.45)$$

Os coeficientes de rigidez, para ambos os rolamentos, relacionados com o grau de liberdade  $\alpha_z$  são nulos, ou seja  $k_{x\alpha_z} = k_{y\alpha_z} = k_{z\alpha_z} = k_{\alpha_x\alpha_z} = k_{\alpha_y\alpha_z} = k_{\alpha_z\alpha_z} = 0$ , devido ao fato de que um mancal de rolamento permite rotação em torno do eixo Z.

## 2.4 – LIMITAÇÕES DA FORMULAÇÃO MATEMÁTICA PARA O MANCAL DE ELEMENTOS ROLANTES

A formulação matemática para a determinação da matriz de rigidez do mancal de elementos rolantes, em alguns casos particulares, leva a um comportamento dos coeficientes de rigidez que não condiz com a realidade física. Isto ocorre para os rolamentos de esferas, sob deflexões puramente radiais e altos valores de ângulo de contato sem carga, e rolamento de rolos, sob deflexões puramente axiais e baixos valores de ângulo de contato sem carga.

O efeito de uma deflexão puramente radial e altos valores de ângulo de contato sem carga sobre os rolamentos de esferas é o de estimar valores de coeficiente de rigidez superiores aos reais, pois esferas que não deveriam apresentar deformação passam a contribuir para o cômputo da deformação total do mancal, como pode ser constatado na argumentação técnica apresentada no Anexo 2. Neste anexo, é deduzida uma expressão matemática que permite, a partir dos

valores dos parâmetros de projeto do rolamento e da deflexão radial, estimar o valor do ângulo de contato sem carga para o qual se verifica o comportamento irregular dos coeficientes de rigidez. Esta equação é apresentada abaixo:

$$\cos\beta_0 > \frac{-\delta_x \sin\psi_j + r_L}{2.B.d} \quad (2.46)$$

Em relação aos rolamentos de rolos, a formulação matemática apresentada leva a valores nulos de alguns dos coeficientes de rigidez do mancal de rolamento, quando o ângulo de contato é pequeno, embora o rolamento esteja submetido a uma deflexão axial não nula. A equação que permite a determinação do valor do ângulo de contato, para esta situação, é a seguinte:

$$\operatorname{tg}\beta_0 \leq \frac{r_L}{\delta_z} \quad (2.47)$$

Para o caso dos rolamentos de esferas, o problema aqui apontado pode ser suprimido bastando para isso que não seja usado, nas expressões dos coeficientes de rigidez do mancal, todas as esferas do rolamento, ou seja, devem ser usadas no cômputo da deformação total do mancal de rolamento somente as esferas que estejam posicionadas na metade do rolamento oposta a direção e sentido de aplicação da deflexão radial. Por outro lado, no caso de rolamentos de rolos, o problema desaparece completamente quando a folga radial é nula (ver Anexo 2).

## 2.5 – DETERMINAÇÃO NUMÉRICA DA MATRIZ DE RIGIDEZ

A determinação dos coeficientes de rigidez, que compõem a matriz  $\mathbf{K}_m$ , está condicionada à obtenção dos deslocamentos de translação e rotação que compõem o vetor deslocamento  $\mathbf{q} = [\delta_x \delta_y \delta_z \alpha_x \alpha_y]^T$ , o qual por sua vez é consequência do carregamento aplicado no sistema, representado pelo vetor de carga  $\mathbf{F}$ , e responsável pelas reações de apoio que nada mais são do que as cargas e momentos que atuam nos rolamento.

De um modo genérico, a determinação dos coeficientes de rigidez envolve a solução de um sistema de  $5N$  equações não lineares, para  $N$  mancais de rolamento, que são obtidas a partir das Eq. (2.6) a (2.10), equações de equilíbrio da estática e da equação diferencial para a deflexão da viga de Euler. O sistema de equações assim obtido é, então, resolvido para a determinação do

vetor  $\mathbf{q}$  em cada mancal e os coeficientes de rigidez são obtidos através das Eq. (2.13) a (2.27), para rolamentos de esfera, e Eq. (2.31) a (2.45), para rolamentos de rolo.

Pela boa característica de convergência, o método de Newton modificado [18] é usado, no processo de solução numérico, e o problema fica assim estabelecido:

$$\mathbf{E}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (2.48)$$

onde  $\mathbf{E}$  é um vetor  $n$ -dimensional que contém as equações a serem solucionadas e  $\mathbf{q}$  é o vetor deslocamento dos mancais,. No procedimento iterativo, iniciamos com uma estimativa  $\mathbf{q}^{(0)}$  para a raiz da Eq. (2.48). Em seguida, esta estimativa é melhorada baseado em:

$$\mathbf{q}^{(k+1)} = \mathbf{q}^{(k)} + \Delta \mathbf{q}^{(k)}; \quad \Delta \mathbf{q}^{(k)} = -\mathbf{J}_{ac}^{-1} \mathbf{E}^{(k)} \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.49)$$

onde  $\mathbf{J}_{ac}$  é o Jacobiano do sistema de equações,  $\mathbf{E}^{(k)}$  o vetor que contém os valores das funções na estimativa corrente e  $\Delta \mathbf{q}^{(k)}$  é um vetor que permite mudança na estimativa de  $\mathbf{q}^{(k)}$ . O procedimento é continuado até que  $\mathbf{q}^{(k)}$  satisfaça a Eq. (2.48). Visto que os cálculos numéricos não são exatos, foi usado um critério de parada que consiste em calcular o comprimento do vetor como:

$$\|\mathbf{E}(\mathbf{q})\| = \left( \sum_{i=1}^n E_i^2(\mathbf{q}) \right)^{1/2} \quad (2.50)$$

e aceitar  $\mathbf{q}^*$  como uma raiz de  $\mathbf{E}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$  se  $\|\mathbf{E}(\mathbf{q}^*)\| \leq \varepsilon$ , sendo  $\varepsilon$  um número pequeno positivo.

O procedimento numérico de determinação do vetor deslocamento foi implementado no *software* MATLAB V. 5.0, tendo por base o algoritmo, para solução de sistemas de equações não-lineares, apresentado por Dennis e Schnabel [18], o qual é descrito no Anexo 3.

## 2.6 – APLICAÇÃO DO MÉTODO AO SISTEMA DE TRANSMISSÃO DA CAIXA DE ENGRENAGEM

A Fig. 2.8 mostra um desenho esquemático do sistema de transmissão da caixa de engrenagem. O torque de entrada  $T_e$  é aplicado no eixo piloto e, através do par de engrenagens

de entrada ( $E_1$  e  $E_2$ ), é transmitido para o eixo carretel que, por sua vez transmite o movimento para o eixo principal com o auxílio das engrenagens de ré ( $E_{11}$ ,  $E_{12}$  e  $E_{13}$ ), 1ª ( $E_7$  e  $E_8$ ), 2ª ( $E_5$  e  $E_6$ ), 3ª ( $E_3$  e  $E_4$ ) ou 5ª ( $E_9$  e  $E_{10}$ ) marchas. Na condição de 4ª marcha, o torque de entrada é transmitido diretamente do eixo piloto para o eixo principal.

Para efeito de análise, o sistema de transmissão é subdividido em duas partes e as equações representativas do modelo são obtidas, de forma genérica, somente para a situação correspondente a 1ª, 2ª ou 3ª marcha engrenada, negligenciando-se o peso próprio dos elementos que constituem o sistema. A primeira parte do sistema, aqui denominada de subsistema principal, é constituída pelos eixos piloto e principal, mancais  $B_4$  a  $B_7$  e engrenagens  $E_1$  e  $E_M$ , onde  $M = 3, 5$  ou  $7$  conforme a marcha engrenada seja, respectivamente, a 3ª, 2ª ou 1ª marcha. A Segunda parte, denominada de subsistema secundário, é constituída pelo eixo carretel, mancais  $B_1$  a  $B_3$  e engrenagens  $E_2$  e  $E_N$ , onde  $N = 4, 6$  ou  $8$  conforme a marcha engrenada seja, respectivamente, a 3ª, 2ª ou 1ª marcha.

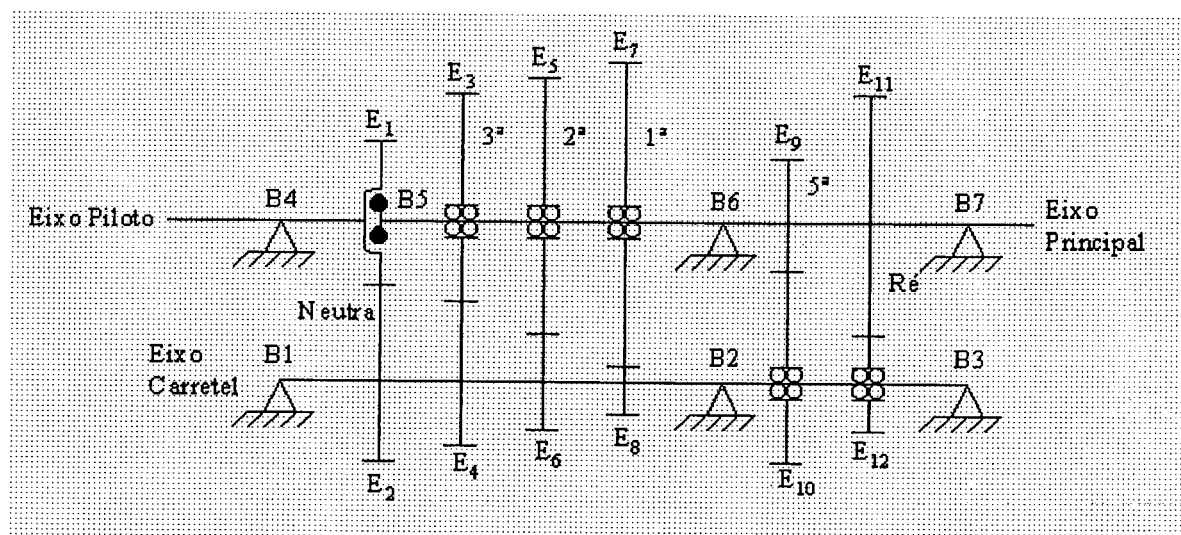


Figura 2.8 – Desenho esquemático do sistema de transmissão da caixa de engrenagem

### 2.6.1 – Subsistema Principal

Partindo da constatação de que o subsistema principal representa um sistema estrutural estaticamente indeterminado, as equações que regem o seu comportamento, sob condições de carga, são obtidas pela aplicação das equações de equilíbrio da estática e complementadas por outras que envolvem deformações. Assim, para se obter as equações complementares, serão assumidas as seguintes hipóteses:

- a) eixo piloto comportando-se como um corpo rígido, pelo fato de ser um eixo cujo diâmetro é da mesma ordem de grandeza do comprimento submetido à carga;
- b) eixo principal rígido no sentido longitudinal (direção Z) e sua flexibilidade transversal descrita pela equação da viga de Euler.

A Fig. 2.9 mostra um diagrama de corpo livre para o eixo piloto, em uma representação tridimensional, e diagramas de movimento de corpo rígido para relacionar as deflexões nos pontos A e B, que representam a posição dos rolamentos B<sub>4</sub> e B<sub>5</sub> respectivamente. Com auxílio desta figura, e das equações de equilíbrio da estática, é possível escrever as seguintes equações de esforços:

$$R_x^{(4)} - R_x^{(5)} + F_x^{(e)} = 0 \quad (2.51)$$

$$R_y^{(4)} - R_y^{(5)} + F_y^{(e)} = 0 \quad (2.52)$$

$$R_z^{(4)} - R_z^{(5)} + F_z^{(e)} = 0 \quad (2.53)$$

$$M_x^{(4)} - M_x^{(5)} - F_z^{(e)} \cdot R_p^{(1)} + F_y^{(e)} \cdot \ell - R_y^{(5)} \cdot (\ell + \Delta\ell) = 0 \quad (2.54)$$

$$M_y^{(4)} - M_y^{(5)} + R_x^{(5)} \cdot (\ell + \Delta\ell) - F_x^{(e)} \cdot \ell = 0 \quad (2.55)$$

onde  $R_j^{(i)}$  e  $M_j^{(i)}$ , representam as reações nas direções  $j = x, y, z$  no  $i$ -ésimo mancal de rolamento,  $R_p^{(k)}$  o raio primitivo da  $k$ -ésima engrenagem e  $F_j^{(e)}$  as forças que atuam nos dentes do par de engrenagens de entrada. A magnitude de  $F_j^{(e)}$  depende do torque de entrada ( $T_e$ ), número de dentes ( $Z_g$ ), módulo normal ( $m_n$ ), ângulo de pressão normal ( $\phi_n$ ) e ângulo de hélice ( $\phi_h$ ) da engrenagem de entrada  $E_1$ , segundo as seguintes equações:

$$F_x^{(e)} = \frac{2 \cdot T_e \cdot \cos \phi_h}{Z_g \cdot m_n} \quad (2.56)$$

$$F_y^{(e)} = F_x^{(e)} \cdot \frac{\tan \phi_n}{\cos \phi_h} \quad (2.57)$$

$$F_z^{(e)} = F_x^{(e)} \cdot \tan \phi_h \quad (2.58)$$



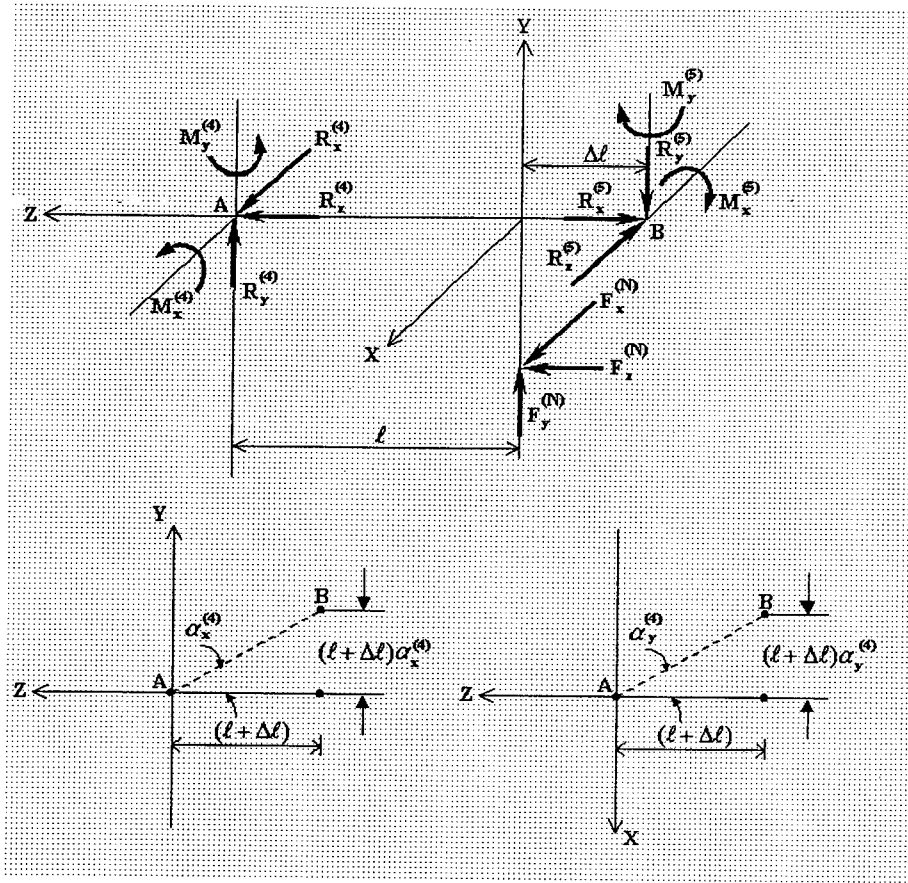


Figura 2.9 – Diagrama de corpo livre para o eixo piloto

Analisando a Fig. 2.10, que mostra o diagrama de corpo livre do eixo principal, é possível escrever:

$$R_x^{(5)} + R_x^{(6)} + R_x^{(7)} - F_x^{(M)} = 0 \quad (2.59)$$

$$R_y^{(5)} + R_y^{(6)} + R_y^{(7)} + F_y^{(M)} = 0 \quad (2.60)$$

$$R_z^{(5)} + R_z^{(6)} + R_z^{(7)} - F_z^{(M)} = 0 \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} M_x^{(5)} + M_x^{(6)} + M_x^{(7)} + F_z^{(M)} \cdot R_p^{(9-2M)} + R_y^{(7)} \cdot C_5 + \dots \\ R_y^{(6)} \cdot (C_5 - C_4) + F_y^{(M)} \cdot (C_5 - C_M) = 0 \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} M_y^{(5)} + M_y^{(6)} + M_y^{(7)} - R_x^{(7)} \cdot C_5 - R_x^{(6)} \cdot (C_5 - C_4) + \dots \\ F_x^{(M)} \cdot (C_5 - C_M) = 0 \end{aligned} \quad (2.63)$$

onde  $F_j^{(M)}$  representa as forças que atuam nos dentes do par de engrenagens da marcha engrenada, com  $M = 1, 2$  ou  $3$  identificando, respectivamente, a 1ª, 2ª ou 3ª marcha. A magnitude destas forças podem ser obtidas pelas seguintes equações:

$$F_x^{(M)} = F_x^{(e)} \cdot \frac{R_p^{(2)}}{R_p^{(10-2M)}} \quad (2.64)$$

$$F_y^{(M)} = F_x^{(M)} \cdot \frac{\tan \phi_n}{\cos \phi_h} \quad (2.65)$$

$$F_z^{(M)} = F_x^{(M)} \cdot \tan \phi_h \quad (2.66)$$

onde os ângulos de pressão normal e de hélice nas Eq. (2.65) e (2.66) dizem respeito ao par de engrenagem da marcha  $M$  engrenada.

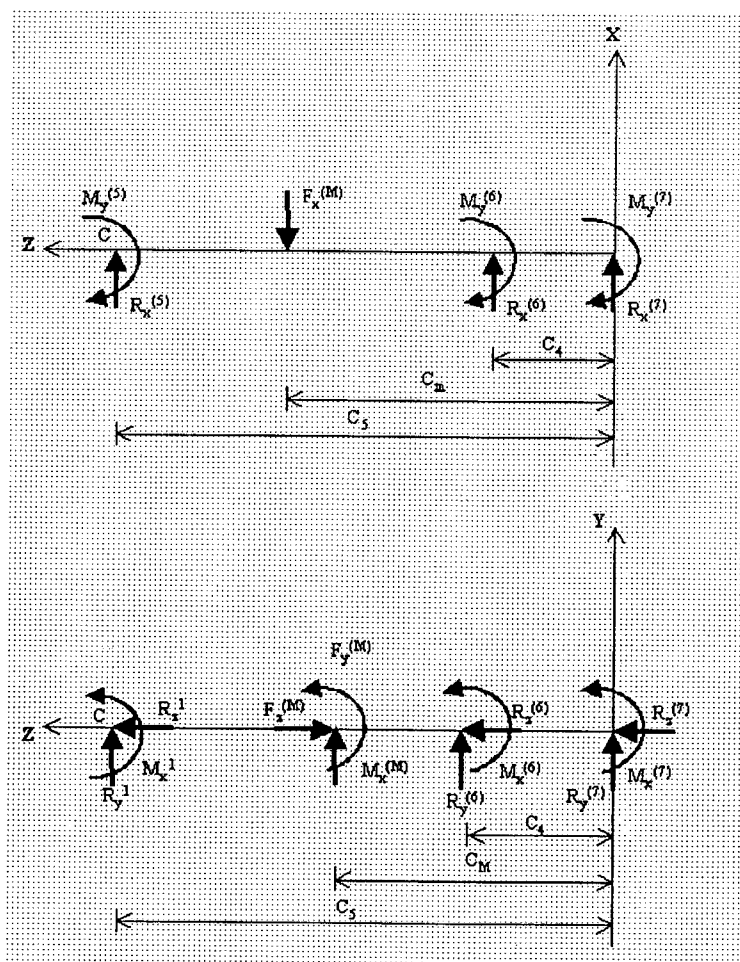


Figura 2.10 - Diagrama de corpo livre do eixo principal

A análise do movimento de corpo rígido do eixo piloto e a condição de que o vetor de deslocamento no mancal B<sub>5</sub> é fruto de uma combinação dos deslocamentos das extremidades dos eixos piloto e principal, respectivamente representadas pelos pontos B e C nas Fig. 2.9 e 2.10, permitem escrever:

$$\delta_x^{(c)} = \delta_x^{(4)} - (\ell + \Delta\ell)\alpha_y^{(4)} - \delta_x^{(5)} \quad (2.67)$$

$$\delta_y^{(c)} = \delta_y^{(4)} + (\ell + \Delta\ell)\alpha_x^{(4)} - \delta_y^{(5)} \quad (2.68)$$

$$\delta_z^{(c)} = \delta_z^{(4)} - \delta_z^{(5)} \quad (2.69)$$

$$\alpha_x^{(c)} = \alpha_x^{(4)} - \alpha_x^{(5)} \quad (2.70)$$

$$\alpha_y^{(c)} = \alpha_y^{(4)} - \alpha_y^{(5)} \quad (2.71)$$

A hipótese de rigidez longitudinal infinita para o eixo principal e a Eq. (2.69) permitem escrever:

$$\delta_z^{(4)} - \delta_z^{(5)} - \delta_z^{(6)} = 0 \quad (2.72)$$

$$\delta_z^{(4)} - \delta_z^{(5)} - \delta_z^{(7)} = 0 \quad (2.73)$$

Para pequenas declividades, a curvatura da viga está relacionada ao momento fletor, em qualquer seção, pela equação diferencial que rege o comportamento da linha elástica, a qual pode ser escrita para os planos X-Z e Y-Z como:

$$\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{M_{x-z}(z)}{E.I(z)} \quad (2.74)$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{M_{y-z}(z)}{E.I(z)} \quad (2.75)$$

com

$$M_{x-z}(z) = R_x^{(7)}.z - M_y^{(7)} + HC_4[R_x^{(6)}.(z - C_4) - M_y^{(6)}.(z - C_4)^0] - \dots \\ HC_M.F_x^{(M)}.(z - C_M) \quad (2.76)$$

$$M_{y-z}(z) = R_y^{(7)} \cdot z + M_x^{(7)} + HC_4 [R_y^{(6)} \cdot (z - C_4) + M_x^{(6)} \cdot (z - C_4)^0] + \dots \\ HC_m \cdot [F_y^{(M)} \cdot (z - C_m) + M_x^{(M)} \cdot (z - C_M)^0] \quad (2.77)$$

$$\frac{1}{I(z)} = \frac{1}{I_1} \left[ \frac{1}{m_1} + \sum_{i=1}^5 HG_i \cdot \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) \right] \quad (2.78)$$

onde  $M_x^{(M)} = F_z^{(M)} \cdot R_p^{(9-2M)}$ ;  $m_i = I_i / I_1$ , com  $I_i$  representando o momento de inércia da seção transversal  $i$  do eixo escalonado; HC e HG são, respectivamente, funções degraus de carga e geometria usadas para representar o momento fletor por uma única função e incorporar a variação do momento de inércia da seção transversal do eixo ao longo de seu comprimento. Estas funções são definidas por:

$$HC_i = \begin{cases} 0 & z < C_i \\ 1 & z \geq C_i \end{cases} \quad (2.79)$$

$$HG_i = \begin{cases} 0 & z < G_i \\ 1 & z \geq G_i \end{cases} \quad (2.80)$$

e suas propriedades dadas pelo seguinte conjunto de equações:

$$HC \cdot HG = HG \quad \text{para } G > C \\ \int_0^z HC f(z) dz = \int_C^z f(z) dz \\ \int_0^z HC \cdot HG \cdot f(z) dz = HG \int_G^z f(z) dz \quad (2.81)$$

Nas equações (2.76) e (2.77), uma vez que  $(z-a)^0 = 1$ , para qualquer valor de  $(z-a)$ , deve-se adotar as seguintes regras:

$$(z-a)^0 = \begin{cases} 0 & \text{para } z < a \\ 1 & \text{para } z \geq a \end{cases} \\ \int (z-a)^n dx = \frac{1}{n+1} (z-a)^{n+1} \quad n \geq 0 \quad (2.82)$$

Finalmente, integrando as equações (2.74) e (2.75), respeitando neste processo as definições apresentadas nas equações (2.79) a (2.82), obtém-se as expressões da rotação e flecha para os planos X-Z e Y-Z. As constantes de integração, que surgem devido ao processo de integração, são então determinadas, impondo-se as condições de contorno nos mancais ( $z = 0$ ,  $\frac{dy}{dz} = \alpha_x^{(7)}$ ,  $y = \delta_y^{(7)}$ ,  $\frac{dx}{dz} = \alpha_y^{(7)}$  e  $x = \delta_x^{(7)}$ ;  $z = C_4$ ,  $\frac{dy}{dz} = \alpha_x^{(6)}$ ,  $y = \delta_y^{(6)}$ ,  $\frac{dx}{dz} = \alpha_y^{(6)}$  e  $x = \delta_x^{(6)}$ ;  $z = C_5$ ,  $\frac{dy}{dz} = \alpha_x^{(C)}$ ,  $y = \delta_y^{(C)}$ ,  $\frac{dx}{dz} = \alpha_y^{(C)}$  e  $x = \delta_x^{(C)}$ ), resultando o seguinte conjunto de equações:

## Plano X-Z

$$\alpha_y^{(7)} - \alpha_y^{(6)} + \frac{1}{E.I_1} \left\{ R_x^{(7)} \left[ \frac{C_4^2}{2m_1} + \left( \frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1} \right) \frac{(C_4^2 - G_1^2)}{2} \right] - \dots \right. \\ \left. M_y^{(7)} \left[ \frac{C_4}{m_1} + \left( \frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1} \right) (C_4 - G_1) \right] \right\} = 0 \quad (2.83)$$

$$\delta_x^{(7)} - \delta_x^{(6)} + \alpha_y^{(7)} C_4 + \frac{1}{E.I_1} \left\{ R_x^{(7)} \left[ \frac{C_4^3}{6m_1} + \left( \frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1} \right) \frac{(C_4^3 - G_1^3)}{6} + \dots \right. \right. \\ \left. \left. \frac{G_1^2(G_1 - C_4)}{2} \right] - M_y^{(7)} \left[ \frac{C_4^2}{2m_1} + \left( \frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1} \right) \frac{(C_4 - G_1)^2}{2} \right] \right\} = 0 \quad (2.84)$$

$$\alpha_y^{(7)} + \alpha_y^{(5)} - \alpha_y^{(4)} + \frac{1}{E.I_1} \left\{ R_x^{(7)} \left[ \frac{C_5^2}{2m_1} + \sum_{i=1}^5 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) \frac{(C_5^2 - G_i^2)}{2} \right] - \dots \right. \\ \left. M_y^{(7)} \left[ \frac{C_5}{m_1} + \sum_{i=1}^5 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) (C_5 - G_i) \right] + R_x^{(6)} \left[ \frac{(C_5 - C_4)^2}{2m_2} + \dots \right. \right. \\ \left. \sum_{i=1}^5 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) \frac{(C_5 - C_4)^2 - (G_i - C_4)^2}{2} \right] - M_y^{(6)} \left[ \frac{(C_5 - C_4)}{m_2} + \dots \right. \right. \\ \left. \sum_{i=1}^5 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) (C_5 - G_i) \right] - F_x^{(M)} \left[ \frac{(C_5 - C_M)^2}{2m_{M+1}} + \dots \right. \\ \left. \left. \sum_{i=M+1}^5 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) \frac{(C_5 - C_M)^2 - (G_i - C_M)^2}{2} \right] \right\} = 0 \quad (2.85)$$

$$\begin{aligned}
& \delta_x^{(7)} + \delta_x^{(5)} - \delta_x^{(4)} + (\ell + \Delta\ell)\alpha_y^{(4)} + \alpha_y^{(7)}C_5 + \frac{1}{E.I_1} \left\{ R_x^{(7)} \left[ \frac{C_5^3}{6m_1} + \dots \right. \right. \\
& \sum_{i=1}^5 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) \left[ \frac{C_5^3 - G_i^3}{6} + \frac{G_i^2(G_i - C_5)}{2} \right] - M_y^{(7)} \left[ \frac{C_5^2}{2m_1} + \dots \right. \\
& \sum_{i=1}^5 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) \frac{(C_5 - G_i)^2}{2} \left. \right] + R_x^{(6)} \left[ \frac{(C_5 - C_4)^3}{6m_2} + \dots \right. \\
& \sum_{i=2}^5 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) \left( \frac{(C_5 - C_4)^3 - (G_i - C_4)^3}{6} + \dots \right. \\
& \left. \left. \frac{(G_i - C_4)^2(G_i - C_5)}{2} \right) \right] - M_y^{(6)} \left[ \frac{(C_5 - C_4)^2}{2m_2} + \dots \right. \\
& \sum_{i=1}^5 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) \frac{(C_5 - G_i)^2}{2} \left. \right] - F_x^{(M)} \left[ \frac{(C_5 - C_M)^3}{6m_{M+1}} + \dots \right. \\
& \sum_{i=M+1}^5 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) \left( \frac{(C_5 - C_M)^3 - (G_i - C_M)^3}{6} + \dots \right. \\
& \left. \left. \frac{(G_i - C_M)^2(G_i - C_5)}{2} \right) \right] \left. \right\} = 0
\end{aligned} \tag{2.86}$$

Plano Y-Z

$$\begin{aligned}
& \alpha_x^{(7)} - \alpha_x^{(6)} + \frac{1}{E.I_1} \left\{ R_y^{(7)} \left[ \frac{C_4^2}{2m_1} + \left( \frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1} \right) \frac{(C_4^2 - G_1^2)}{2} \right] + \dots \right. \\
& \left. M_x^{(7)} \left[ \frac{C_4}{m_1} + \left( \frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1} \right) (C_4 - G_1) \right] \right\} = 0
\end{aligned} \tag{2.87}$$

$$\begin{aligned}
& \delta_y^{(7)} - \delta_y^{(6)} + \alpha_x^{(7)}C_4 + \frac{1}{E.I_1} \left\{ R_y^{(7)} \left[ \frac{C_4^3}{6m_1} + \left( \frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1} \right) \left( \frac{C_4^3 - G_1^3}{6} + \dots \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{G_1^2(G_1 - C_4)}{2} \right) \right] + M_x^{(7)} \left[ \frac{C_4^2}{2m_1} + \left( \frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1} \right) \frac{(C_4 - G_1)^2}{2} \right] \right\} = 0
\end{aligned} \tag{2.88}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha_x^{(7)} + \alpha_x^{(5)} - \alpha_x^{(4)} + \frac{1}{E.I_1} \left\{ R_y^{(7)} \left[ \frac{C_5^2}{2m_1} + \sum_{i=1}^5 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) \frac{(C_5^2 - G_i^2)}{2} \right] + \dots \right. \\
& M_x^{(7)} \left[ \frac{C_5}{m_1} + \sum_{i=1}^5 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) (C_5 - G_i) \right] + R_y^{(6)} \left[ \frac{(C_5 - C_4)^2}{2m_2} + \dots \right. \\
& \left. \sum_{i=2}^5 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) \frac{(C_5 - C_4)^2 - (G_i - C_4)^2}{2} \right] + M_x^{(6)} \left[ \frac{(C_5 - C_4)}{m_2} + \dots \right. \\
& \left. \sum_{i=2}^5 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) (C_5 - G_i) \right] + F_y^{(M)} \left[ \frac{(C_5 - C_M)^2}{2m_{M+1}} + \dots \right. \\
& \left. \sum_{i=M+1}^5 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) \frac{(C_5 - C_M)^2 - (G_i - C_M)^2}{2} \right] + \dots \\
& \left. M_x^{(M)} \left[ \frac{(C_5 - C_M)}{2m_{M+1}} + \sum_{i=M+1}^5 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) (C_5 - G_i) \right] \right\} = 0
\end{aligned}
\tag{2.89}$$

$$\begin{aligned}
& \delta_y^{(7)} + \delta_y^{(5)} - \delta_y^{(4)} - (\ell + \Delta\ell) \alpha_x^{(4)} + \alpha_x^{(7)} C_5 + \frac{1}{E.I_1} \left\{ R_y^{(7)} \left[ \frac{C_5^3}{6m_1} + \dots \right. \right. \\
& \left. \sum_{i=1}^5 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) \left[ \frac{C_5^3 - G_i^3}{6} + \frac{G_i^2 (G_i - C_5)}{2} \right] + M_x^{(7)} \left[ \frac{C_5^2}{2m_1} + \sum_{i=1}^5 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) \frac{(C_5 - G_i)^2}{2} \right] \right. \\
& \left. + R_x^{(6)} \left[ \frac{(C_5 - C_4)^3}{6m_2} + \sum_{i=2}^5 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) \left( \frac{(C_5 - C_4)^3 - (G_i - C_4)^3}{6} + \dots \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{(G_i - C_4)^2 (G_i - C_5)}{2} \right) \right] + M_x^{(6)} \left[ \frac{(C_5 - C_4)^2}{2m_2} + \sum_{i=1}^5 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) \frac{(C_5 - G_i)^2}{2} \right] + \dots \\
& \left. F_x^{(M)} \left[ \frac{(C_5 - C_M)^3}{6m_{M+1}} + \sum_{i=M+1}^5 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) \left( \frac{(C_5 - C_M)^3 - (G_i - C_M)^3}{6} + \dots \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{(G_i - C_M)^2 (G_i - C_5)}{2} \right) \right] + M_x^{(M)} \left[ \frac{(C_5 - C_M)^2}{2m_{M+1}} + \sum_{i=M+1}^5 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) \frac{(C_5 - G_i)^2}{2} \right] \right\} = 0
\end{aligned}
\tag{2.90}$$

A determinação dos coeficientes de rigidez para os mancais de rolamento envolve a solução de um sistema com um total de 20 equações não lineares, representado pelas equações (2.51) a (2.55), (2.59) a (2.63), (2.72) a (2.73) e (2.83) a (2.90). Nestas equações os valores das reações de mancais são determinadas pelas equações (2.6) a (2.10), com os parâmetros que descrevem as características dos rolamentos dados pela tabela 2.1.

As tabelas 2.2 e 2.3 listam, respectivamente, as propriedades geométricas dos eixos e engrenagens, completando as informações adicionais para a solução do problema. Observe que a tabela 2.3 apenas lista as propriedades geométricas das engrenagens de entrada, 1ª e 3ª marcha, uma vez que os coeficientes de rigidez serão obtidos para as condições de 1ª e 3ª marcha.

A análise realizada, tendo por base um torque máximo de entrada de 420 N.m e as condições de 1ª e 3ª marca, obteve as seguintes variações dos coeficientes de rigidez, para os mancais B4 a B7, apresentadas nas figuras (2.11 ) a (2.14 ), respectivamente, segundo uma variação de 20 a 100 % do torque máximo.

Tabela 2.1 – Parâmetros dos rolamentos do Subsistema Principal

| PARÂMETROS                              | B <sub>4</sub> e B <sub>6</sub><br>(Rolos) | B <sub>5</sub><br>(Rolos) | B <sub>7</sub><br>(Esferas) |
|---|--|---------------------------|-----------------------------|
| Constante $K_{cd}$ (N/mm <sup>n</sup> ) | 5,146E+05                                  | 3,879E+05                 | 4,1589E+05                  |
| Nº de Elementos (Z)                     | 18   | 16                        | 9                           |
| Folga Radial (mm)                       | -  | -                         | 0,024                       |
| Produto Bd (mm)                         | -  | -                         | 0,319                       |
| Raio r (mm)                             | 30,999                                     | 20,749                    | 30,142                      |
| Ângulo de Contato $\beta_o$ (Graus)     | 17,883                                     | 17,333                    | 15,765                      |

Tabela 2.2 – Propriedades geométricas dos eixo principal

| i | C <sub>i</sub> (mm) | G <sub>i</sub> (mm) | m <sub>i</sub>                          |
|---|---------------------|---------------------|---|
| 1 | 163                 | 123                 | 1,0000                                  |
| 2 | 242                 | 213                 | 1,6824                                  |
| 3 | 275                 | 254                 | 4,3531                                  |
| 4 | 134                 | 296                 | 4,3531                                  |
| 5 | 335                 | 318                 | 1,6824                                  |
| 6 | -                   | -                   | 0,2326                                  |
|   | $\ell = 30,5$       | $\Delta \ell = 14$  | $I_I = 8,245E+03$<br>(mm <sup>4</sup> ) |



Tabela 2.3 – Propriedades geométricas das engrenagens

| PARÂMETRO         | ENGRENAGENS                                |  |  |
|-------------------|--|--|--|
|                   | Entrada                                    | 1ª Marcha                                  | 3ª Marcha                                  |
| Nº de Dentes      | E <sub>1</sub> = 26<br>E <sub>2</sub> = 37 | E <sub>7</sub> = 43<br>E <sub>8</sub> = 15 | E <sub>3</sub> = 30<br>E <sub>4</sub> = 29 |
| Módulo Normal     | 2,20                                       | 2,60                                       | 2,40                                       |
| Ângulo de Pressão | 14,50                                      | 14,50                                      | 14,50                                      |
| Ângulo de Hélice  | 33,00                                      | 19,00                                      | 31,00                                      |

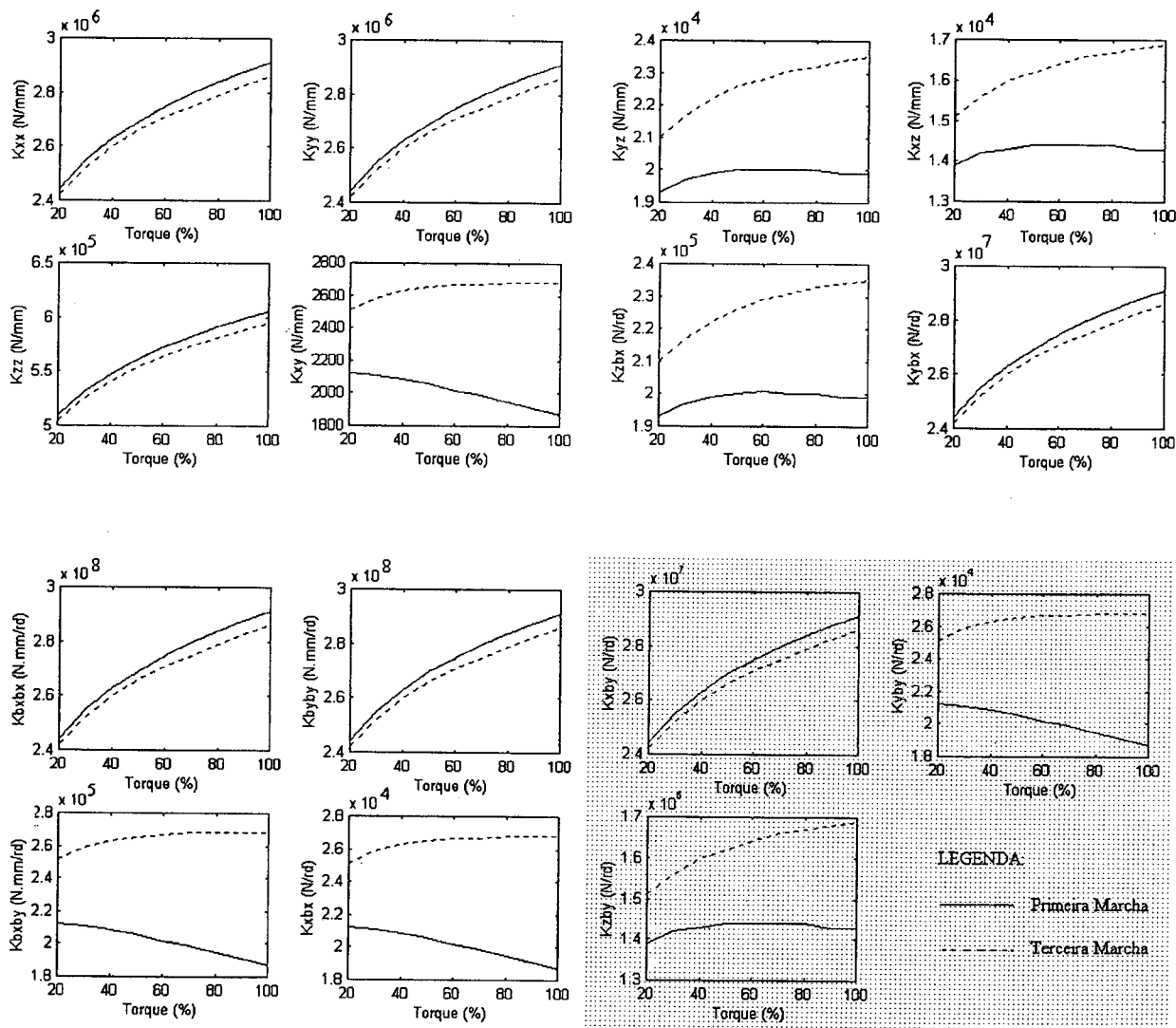


Figura 2.11 – Variação dos coeficientes de rigidez para o mancal B<sub>4</sub>

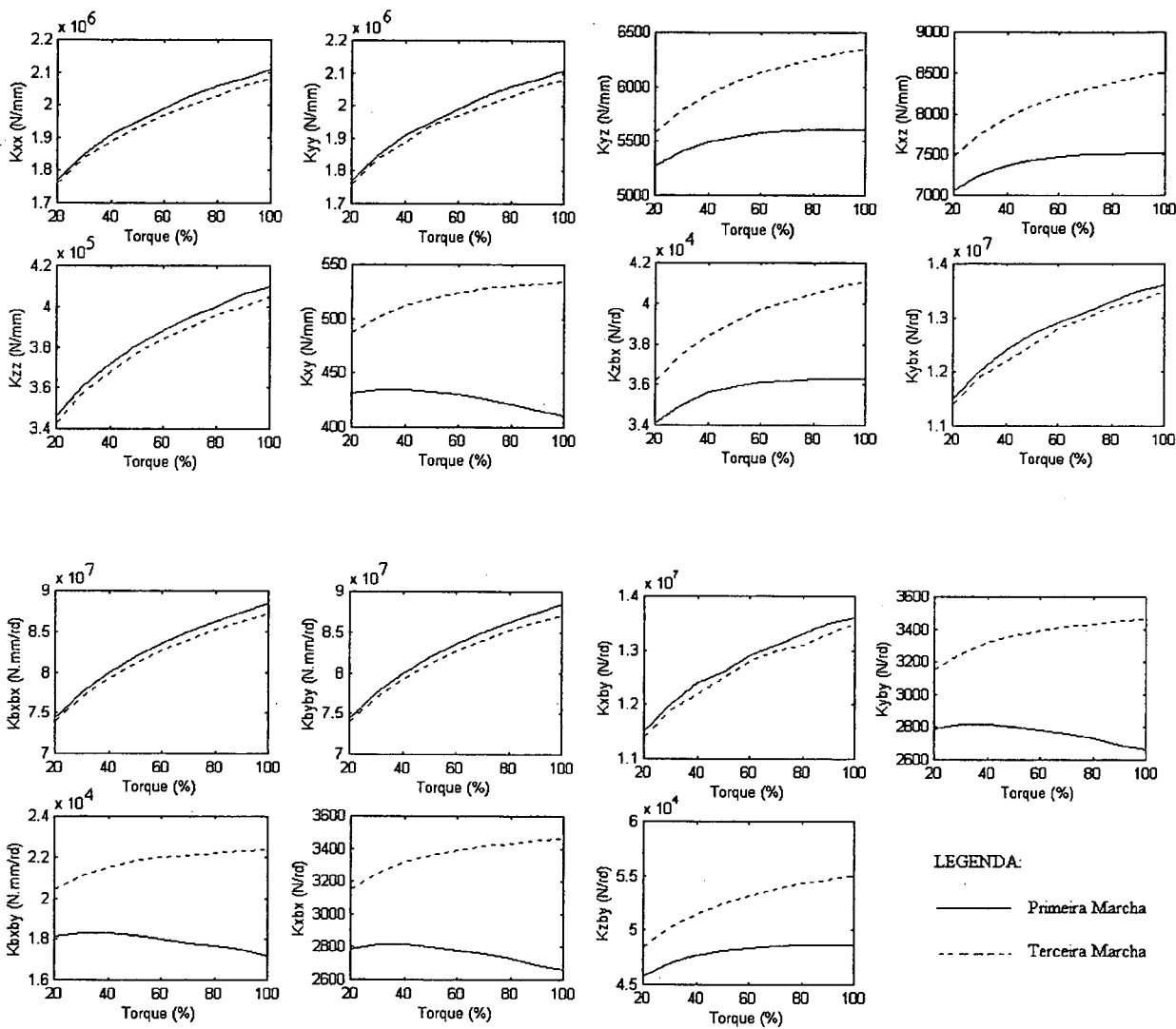


Figura 2.12 – Variação dos coeficientes de rigidez para o mancal B<sub>5</sub>

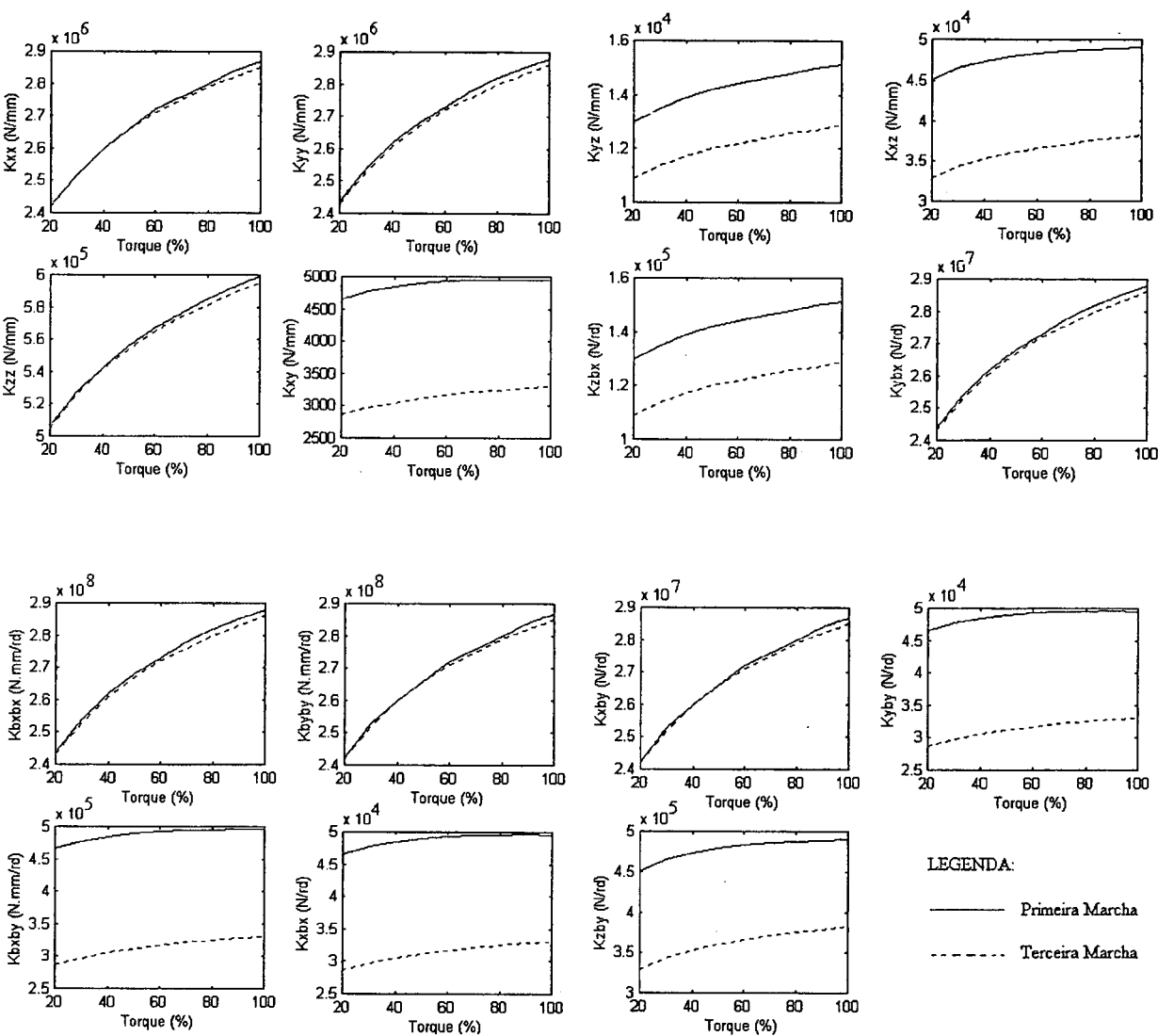


Figura 2.13 – Variação dos coeficientes de rigidez para o mancal B<sub>6</sub>

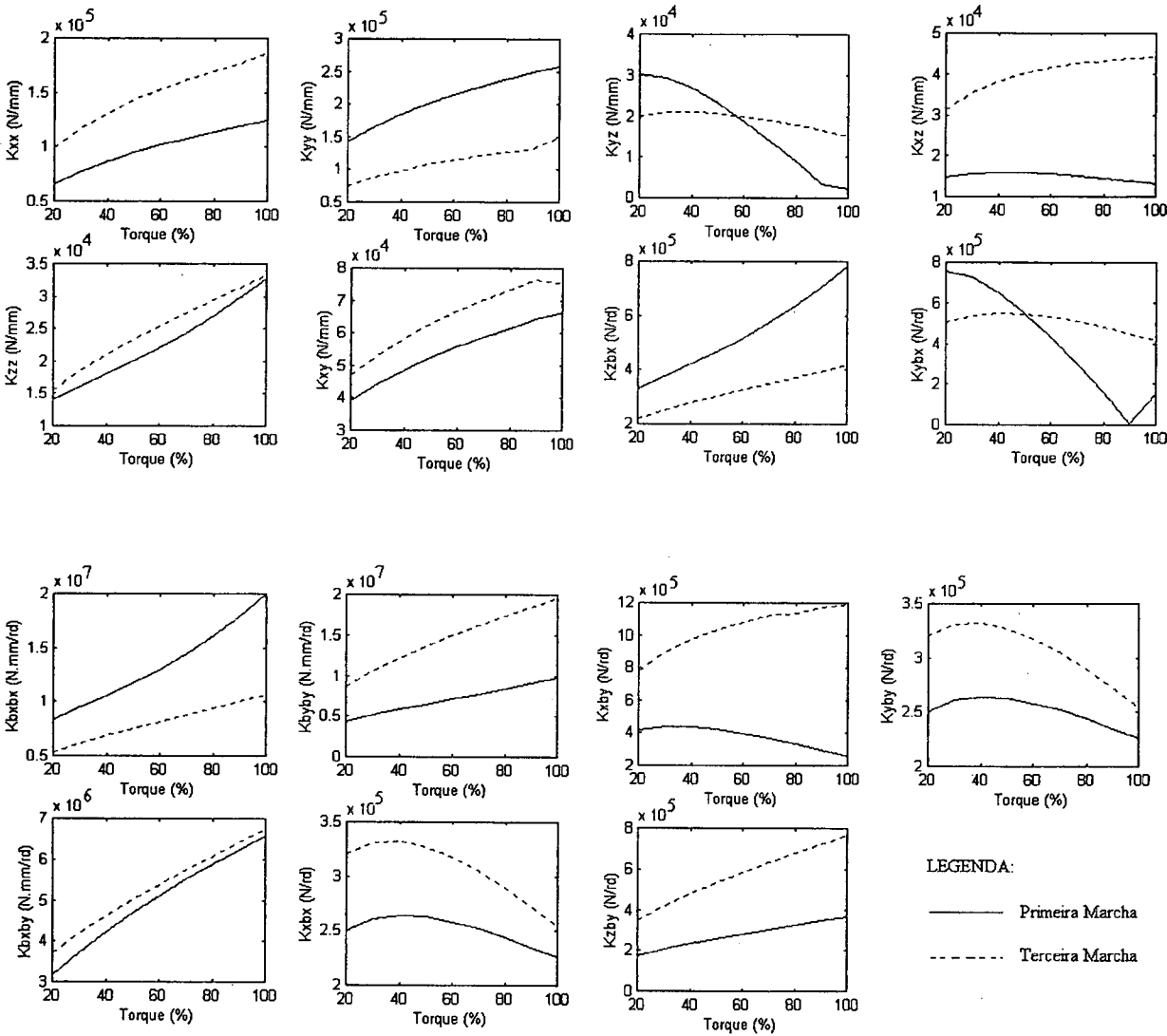


Figura 2.14 – Variação dos coeficientes de rigidez para o mancal B7

### 2.6.2 – Subsistema Secundário

A análise para este subsistema segue os mesmos passos desenvolvidos no caso anterior, uma vez que, a exemplo do subsistema principal, o subsistema secundário também é estaticamente indeterminado. Assim, as mesmas hipóteses assumidas para o eixo principal serão aqui adotadas para o eixo carretel.

Uma análise dos diagramas de corpo livre do eixo carretel, para os planos X-Z e Y-Z, mostrados na Fig. 2.15, permite escrever as seguintes equações de equilíbrio:

$$R_x^{(1)} + R_x^{(2)} + R_x^{(3)} + F_x^{(M)} - F_x^{(e)} = 0 \quad (2.91)$$

$$R_y^{(1)} + R_y^{(2)} + R_y^{(3)} - F_y^{(M)} - F_y^{(e)} = 0 \quad (2.92)$$

$$R_z^{(1)} + R_z^{(2)} + R_z^{(3)} + F_z^{(M)} - F_z^{(e)} = 0 \quad (2.93)$$

$$M_x^{(1)} + M_x^{(2)} + M_x^{(3)} + M_x^{(M)} - M_x^{(e)} + R_y^{(3)} \cdot C_6 + \dots \quad (2.94)$$

$$R_y^{(2)} \cdot (C_6 - C_4) - F_y^{(M)} \cdot (C_6 - C_M) - F_y^{(e)} (C_6 - C_5) = 0$$

$$M_y^{(1)} + M_y^{(2)} + M_y^{(3)} - R_x^{(3)} \cdot C_6 - R_x^{(2)} \cdot (C_6 - C_4) - \dots \quad (2.95)$$

$$F_x^{(M)} \cdot (C_6 - C_M) + F_x^{(e)} \cdot (C_6 - C_5) = 0$$

onde  $M_x^{(M)} = F_z^{(M)} \cdot R_p^{(10-2M)}$ , com  $M = 1, 2$  ou  $3$  dependendo da marcha engrenada ser a 1ª, 2ª, ou 3ª marcha, e  $M_x^{(e)} = F_z^{(e)} \cdot R_p^{(2)}$ .

Com base na hipótese de eixo carretel rígido na direção Z, pode-se escrever:

$$\delta_z^{(1)} - \delta_z^{(2)} = 0 \quad (2.96)$$

$$\delta_z^{(1)} - \delta_z^{(3)} = 0 \quad (2.97)$$

Partindo das equações diferenciais, que regem o comportamento da linha elástica nos planos X-Z e Y-Z, e impondo-se as condições de contorno nos mancais ( $z = 0$ ,  $\frac{dy}{dz} = \alpha_x^{(3)}$ ,  $y = \delta_y^{(3)}$ ,  $\frac{dx}{dz} = \alpha_y^{(3)}$  e  $x = \delta_x^{(3)}$ ;  $z = C_4$ ,  $\frac{dy}{dz} = \alpha_x^{(2)}$ ,  $y = \delta_y^{(2)}$ ,  $\frac{dx}{dz} = \alpha_y^{(2)}$  e  $x = \delta_x^{(2)}$ ;  $z =$

$C_6$ ,  $\frac{dy}{dz} = \alpha_x^{(1)}$ ,  $y = \delta_y^{(1)}$ ,  $\frac{dx}{dz} = \alpha_y^{(1)}$  e  $x = \delta_x^{(1)}$ ), pode-se, então, escrever o seguinte conjunto de equações:

Plano X-Z

$$\alpha_y^{(3)} - \alpha_y^{(2)} + \frac{1}{E.I_1} \left\{ R_x^{(3)} \left[ \frac{C_4^2}{2m_1} + \sum_{i=1}^2 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) \frac{(C_4^2 - G_i^2)}{2} \right] - \dots \right. \\ \left. M_y^{(3)} \left[ \frac{C_4}{m_1} + \sum_{i=1}^2 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) (C_4 - G_i) \right] \right\} = 0 \quad (2.98)$$

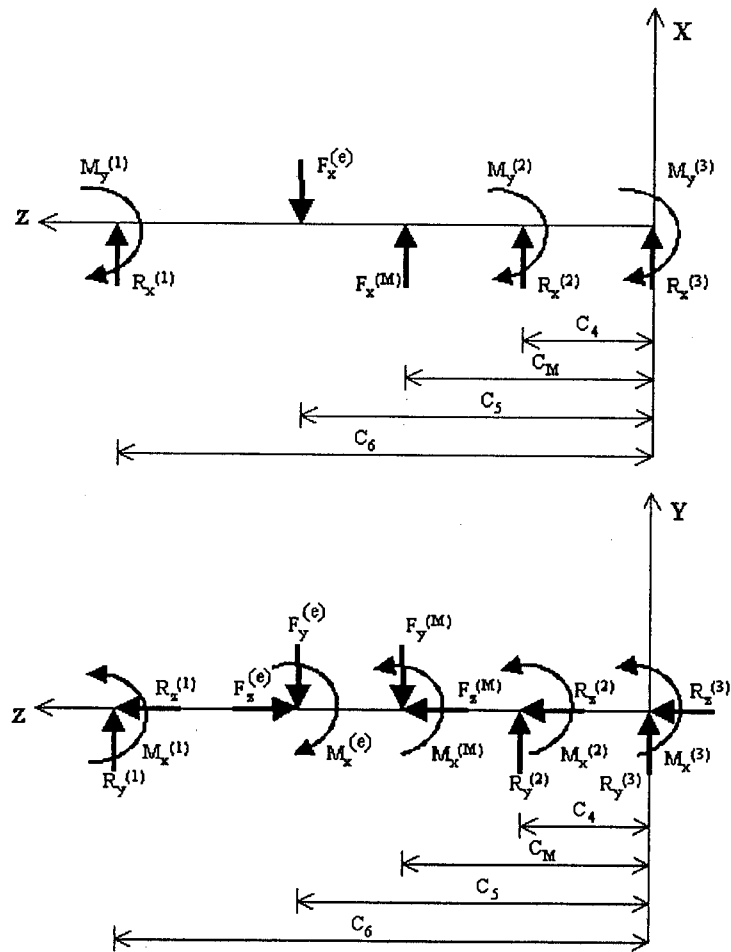


Figura 2.15 - Diagrama de corpo livre do eixo carretel.

$$\delta_x^{(3)} - \delta_x^{(2)} + \alpha_y^{(3)} C_4 + \frac{1}{E.I_1} \left\{ R_x^{(3)} \left[ \frac{C_4^3}{6m_1} + \sum_{i=1}^2 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) \left( \frac{C_4^3 - G_i^3}{6} + \dots \right. \right. \right. \quad (2.99)$$

$$\left. \left. \left. \frac{G_i^2(G_i - C_4)}{2} \right) \right] - M_y^{(3)} \left[ \frac{C_4^2}{2m_1} + \sum_{i=1}^2 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) \frac{(C_4 - G_i)^2}{2} \right] \right\} = 0$$

$$\alpha_y^{(3)} - \alpha_y^{(1)} + \frac{1}{E.I_1} \left\{ R_x^{(3)} \left[ \frac{C_6^2}{2m_1} + \sum_{i=1}^8 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) \frac{(C_6^2 - G_i^2)}{2} \right] - \dots \right.$$

$$M_y^{(3)} \left[ \frac{C_6}{m_1} + \sum_{i=1}^8 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) (C_6 - G_i) \right] + R_x^{(2)} \left[ \frac{(C_6 - C_4)^2}{2m_3} + \dots \right.$$

$$\left. \sum_{i=3}^8 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) \frac{(C_6 - C_4)^2 - (G_i - C_4)^2}{2} \right] - M_y^{(2)} \left[ \frac{(C_6 - C_4)}{m_3} + \dots \right.$$

$$\left. \sum_{i=3}^8 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) (C_6 - G_i) \right] + F_x^{(M)} \left[ \frac{(C_6 - C_M)^2}{2m_{M+3}} + \dots \right.$$

$$\left. \sum_{i=M+3}^8 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) \frac{(C_6 - C_M)^2 - (G_i - C_M)^2}{2} \right] - \dots$$

$$F_x^{(e)} \left[ \frac{(C_6 - C_5)^2}{2m_8} + \left( \frac{1}{m_9} - \frac{1}{m_8} \right) \frac{(C_6 - C_5)^2 - (G_8 - C_5)^2}{2} \right] \Bigg\} = 0 \quad (2.100)$$

$$\begin{aligned}
& \delta_x^{(3)} - \delta_x^{(1)} + \alpha_y^{(3)} C_6 + \frac{1}{E.I_1} \left\{ R_x^{(3)} \left[ \frac{C_6^3}{6m_1} + \dots \right. \right. \\
& \sum_{i=1}^8 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) \left[ \frac{C_6^3 - G_i^3}{6} + \frac{G_i^2(G_i - C_6)}{2} \right] - M_y^{(3)} \left[ \frac{C_6^2}{2m_1} + \dots \right. \\
& \sum_{i=1}^8 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) \frac{(C_6 - G_i)^2}{2} \left. \right] + R_x^{(2)} \left[ \frac{(C_6 - C_4)^3}{6m_3} + \dots \right. \\
& \sum_{i=3}^8 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) \left( \frac{(C_6 - C_4)^3 - (G_i - C_4)^3}{6} + \dots \right. \\
& \left. \left. \frac{(G_i - C_4)^2(G_i - C_6)}{2} \right) \right] - M_y^{(2)} \left[ \frac{(C_6 - C_4)^2}{2m_3} + \dots \right. \\
& \sum_{i=3}^8 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) \frac{(C_6 - G_i)^2}{2} \left. \right] + F_x^{(M)} \left[ \frac{(C_6 - C_M)^3}{6m_{M+3}} + \dots \right. \\
& \sum_{i=M+3}^8 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) \left( \frac{(C_6 - C_M)^3 - (G_i - C_M)^3}{6} + \dots \right. \\
& \left. \left. \frac{(G_i - C_M)^2(G_i - C_6)}{2} \right) \right] - F_x^{(e)} \left[ \frac{(C_6 - C_5)^3}{6m_8} + \dots \right. \\
& \left. \left. \left( \frac{1}{m_9} - \frac{1}{m_8} \right) \left( \frac{(C_6 - C_5)^3 - (G_8 - C_5)^3}{6} + \frac{(G_8 - C_5)^2(G_8 - C_6)}{2} \right) \right] \right\} = 0
\end{aligned} \tag{2.101}$$

Plano Y-Z

$$\begin{aligned}
& \alpha_x^{(3)} - \alpha_x^{(2)} + \frac{1}{E.I_1} \left\{ R_y^{(3)} \left[ \frac{C_4^2}{2m_1} + \sum_{i=1}^2 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) \frac{(C_4^2 - G_i^2)}{2} \right] + \dots \right. \\
& \left. M_x^{(3)} \left[ \frac{C_4}{m_1} + \sum_{i=1}^2 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) (C_4 - G_i) \right] \right\} = 0
\end{aligned} \tag{2.102}$$



$$\delta_y^{(3)} - \delta_y^{(2)} + \alpha_x^{(3)} C_4 + \frac{1}{E.I_1} \left\{ R_y^{(3)} \left[ \frac{C_4^3}{6m_1} + \sum_{i=1}^2 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) \left( \frac{C_4^3 - G_i^3}{6} + \dots \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \frac{G_i^2(G_i - C_4)}{2} \right) \right] + M_x^{(3)} \left[ \frac{C_4^2}{2m_1} + \sum_{i=1}^2 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) \frac{(C_4 - G_i)^2}{2} \right] \right\} = 0 \quad (2.103)$$

$$\alpha_x^{(3)} + -\alpha_x^{(1)} + \frac{1}{E.I_1} \left\{ R_y^{(3)} \left[ \frac{C_6^2}{2m_1} + \sum_{i=1}^8 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) \frac{(C_6^2 - G_i^2)}{2} \right] + \dots \right. \\ M_x^{(3)} \left[ \frac{C_6}{m_1} + \sum_{i=1}^8 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) (C_6 - G_i) \right] + R_y^{(2)} \left[ \frac{(C_6 - C_4)^2}{2m_3} + \dots \right. \\ \left. \sum_{i=3}^8 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) \frac{(C_6 - C_4)^2 - (G_i - C_4)^2}{2} \right] + M_x^{(2)} \left[ \frac{(C_6 - C_4)}{m_3} + \dots \right. \\ \left. \sum_{i=3}^8 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) (C_6 - G_i) \right] - F_y^{(M)} \left[ \frac{(C_6 - C_M)^2}{2m_{M+3}} + \dots \right. \\ \left. \sum_{i=M+3}^8 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) \frac{(C_6 - C_M)^2 - (G_i - C_M)^2}{2} \right] + \dots \\ M_x^{(M)} \left[ \frac{(C_6 - C_M)}{m_{M+3}} + \sum_{i=M+3}^8 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) (C_6 - G_i) \right] - \dots \\ F_y^{(e)} \left[ \frac{(C_6 - C_5)^2}{2m_8} + \left( \frac{1}{m_9} - \frac{1}{m_8} \right) \frac{(C_6 - C_5)^2 - (G_8 - C_5)^2}{2} \right] - \dots \\ \left. M_x^{(e)} \left[ \frac{(C_6 - C_5)}{m_8} + \left( \frac{1}{m_9} - \frac{1}{m_8} \right) (C_6 - G_8) \right] \right\} = 0$$

(2.104)

$$\begin{aligned}
& \delta_y^{(3)} - \delta_y^{(1)} + \alpha_x^{(3)} C_6 + \frac{1}{E.I_1} \left\{ R_y^{(3)} \left[ \frac{C_6^3}{6m_1} + \sum_{i=1}^8 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) \left( \frac{C_6^3 - G_i^3}{6} + \frac{G_i^2(G_i - C_6)}{2} \right) \right] + \dots \right. \\
& M_x^{(3)} \left[ \frac{C_6^2}{2m_1} + \sum_{i=1}^8 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) \frac{(C_6 - G_i)^2}{2} \right] + R_y^{(2)} \left[ \frac{(C_6 - C_4)^3}{6m_3} + \dots \right. \\
& \left. \sum_{i=3}^8 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) \left( \frac{(C_6 - C_4)^3 - (G_i - C_4)^3}{6} + \frac{(G_i - C_4)^2(G_i - C_6)}{2} \right) \right] + \dots \\
& M_x^{(2)} \left[ \frac{(C_6 - C_4)^2}{2m_3} + \sum_{i=3}^8 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) \frac{(C_6 - G_i)^2}{2} \right] - F_y^{(M)} \left[ \frac{(C_6 - C_M)^3}{6m_{M+3}} + \dots \right. \\
& \left. \sum_{i=M+3}^8 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) \left( \frac{(C_6 - C_M)^3 - (G_i - C_M)^3}{6} + \frac{(G_i - C_M)^2(G_i - C_5)}{2} \right) \right] + \dots \\
& M_x^{(M)} \left[ \frac{(C_6 - C_M)^2}{2m_{M+3}} + \sum_{i=M+3}^8 \left( \frac{1}{m_{i+1}} - \frac{1}{m_i} \right) \frac{(C_6 - G_i)^2}{2} \right] - F_y^{(e)} \left[ \frac{(C_6 - C_5)^3}{6m_8} + \dots \right. \\
& \left. \left( \frac{1}{m_9} - \frac{1}{m_8} \right) \left( \frac{(C_6 - C_5)^3 - (G_8 - C_5)^3}{6} + \frac{(G_8 - C_5)^2(G_i - C_6)}{2} \right) \right] - \dots \\
& \left. M_x^{(e)} \left[ \frac{(C_6 - C_5)^2}{2m_8} + \left( \frac{1}{m_9} - \frac{1}{m_8} \right) \frac{(C_6 - G_8)^2}{2} \right] \right\} = 0
\end{aligned}
\tag{2.105}$$

A determinação dos coeficientes de rigidez, para os mancais de rolamento do subsistema secundário, envolve a solução de um sistema com um total de 15 equações não lineares, representado pelas equações (2.91) a (2.105). Nestas equações os valores das reações de mancais, como no caso do subsistema principal, são determinadas pelas equações (2.6) a (2.10), com os parâmetros que descrevem as características dos rolamentos dados pela tabela 2.4, e os dados adicionais para a solução do problema, ou seja as propriedades geométricas do eixo carretel, são listados na tabela 2.5.

A análise realizada, tendo por base um torque máximo de entrada de 420 N.m e as condições de 1ª e 3ª marcha, obteve as seguintes variações dos coeficientes de rigidez, para os mancais B1 a B3, apresentadas nas Fig. 2.16 a 2.18, respectivamente, segundo uma variação de 20 a 100 % do torque máximo.

Tabela 2.4 – Parâmetros dos rolamentos do Subsistema Secundário

| PARÂMETROS                              | B <sub>1</sub> e B <sub>2</sub><br>(Rolos) | B <sub>3</sub><br>(Esferas) |
|---|--|-----------------------------|
| Constante $K_{cd}$ (N/mm <sup>n</sup> ) | 4,895E+05                                  | 3,786E+05                   |
| Nº de Elementos (Z)                     | 16   | 7                           |
| Folga Radial (mm)                       | -  | 0,028                       |
| Produto Bd (mm)                         | -  | 0,301                       |
| Raio r (mm)                             | 27,250                                     | 19,964                      |
| Ângulo de Contato $\beta_o$ (Graus)     | 9,700                                      | 17,544                      |

Tabela 2.5 – Propriedades geométricas dos eixo carretel

| i | C <sub>i</sub> (mm) | G <sub>i</sub> (mm) | m <sub>i</sub>                          |
|---|---------------------|---------------------|---|
| 1 | 163                 | 12                  | 1,0000                                  |
| 2 | 242                 | 70                  | 2,8561                                  |
| 3 | 275                 | 147                 | 9,3789                                  |
| 4 | 134                 | 229                 | 16,0000                                 |
| 5 | 351                 | 262                 | 72,4260                                 |
| 6 | 382                 | 287                 | 193,5688                                |
| 7 | -                   | 337                 | 16,0000                                 |
| 8 | -                   | 366                 | 433,4178                                |
| 9 | -                   | -                   | 9,3789                                  |
|   |                     |                     | $I_I = 7,854E+03$<br>(mm <sup>4</sup> ) |

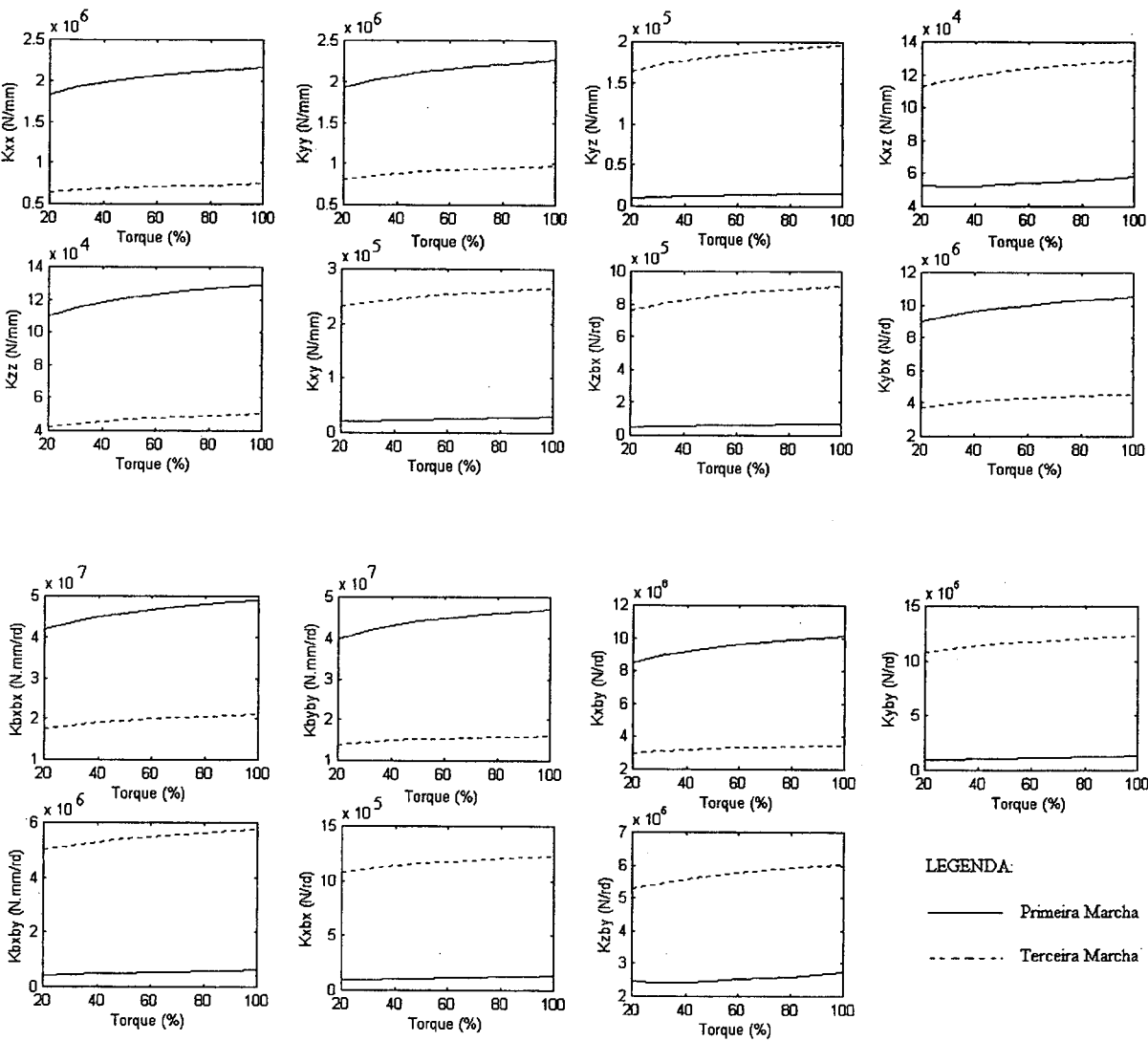


Figura 2.16 – Variação dos coeficientes de rigidez para o mancal B<sub>1</sub>

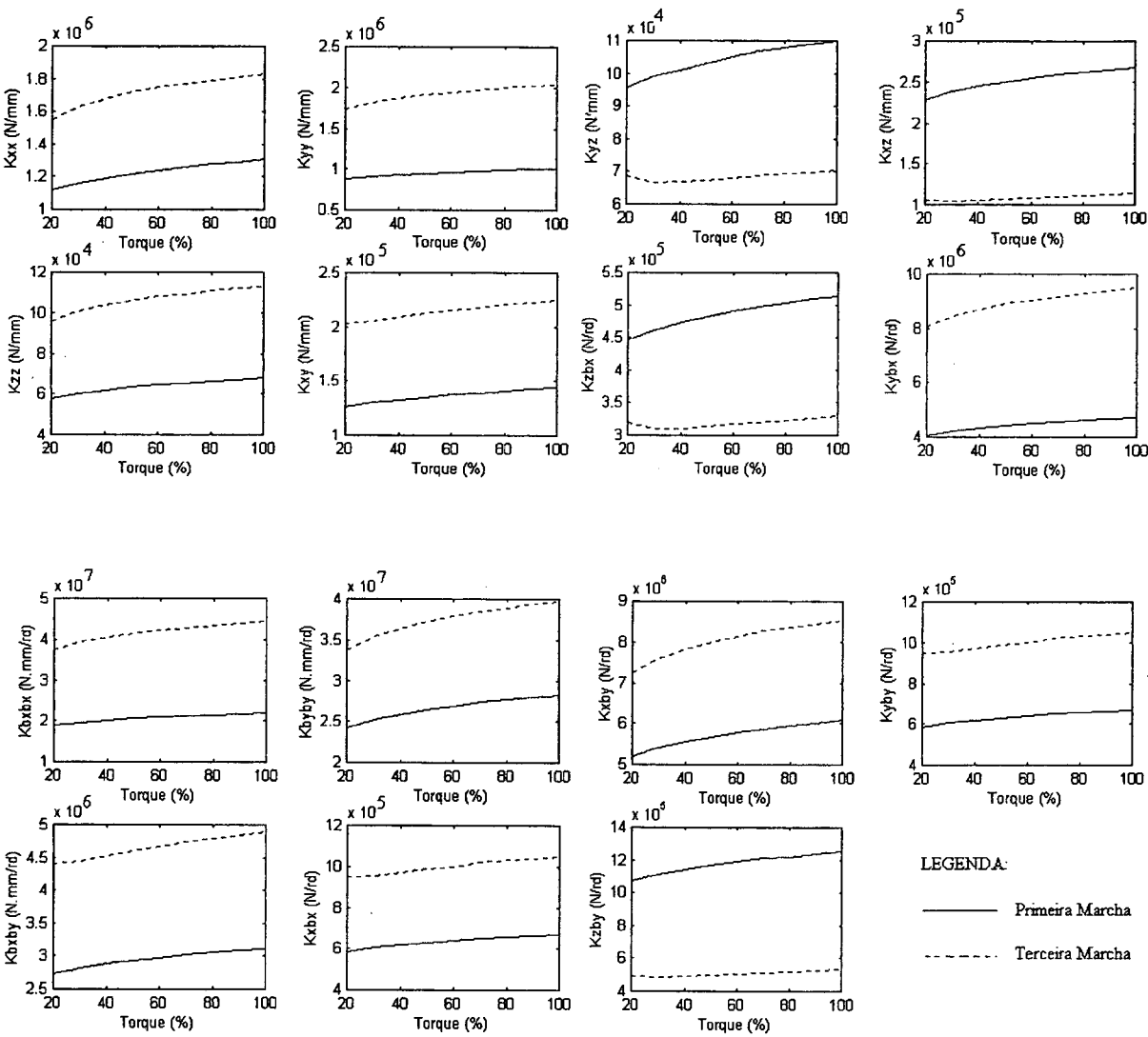


Figura 2.17 – Variação dos coeficientes de rigidez para o mancal B<sub>2</sub>

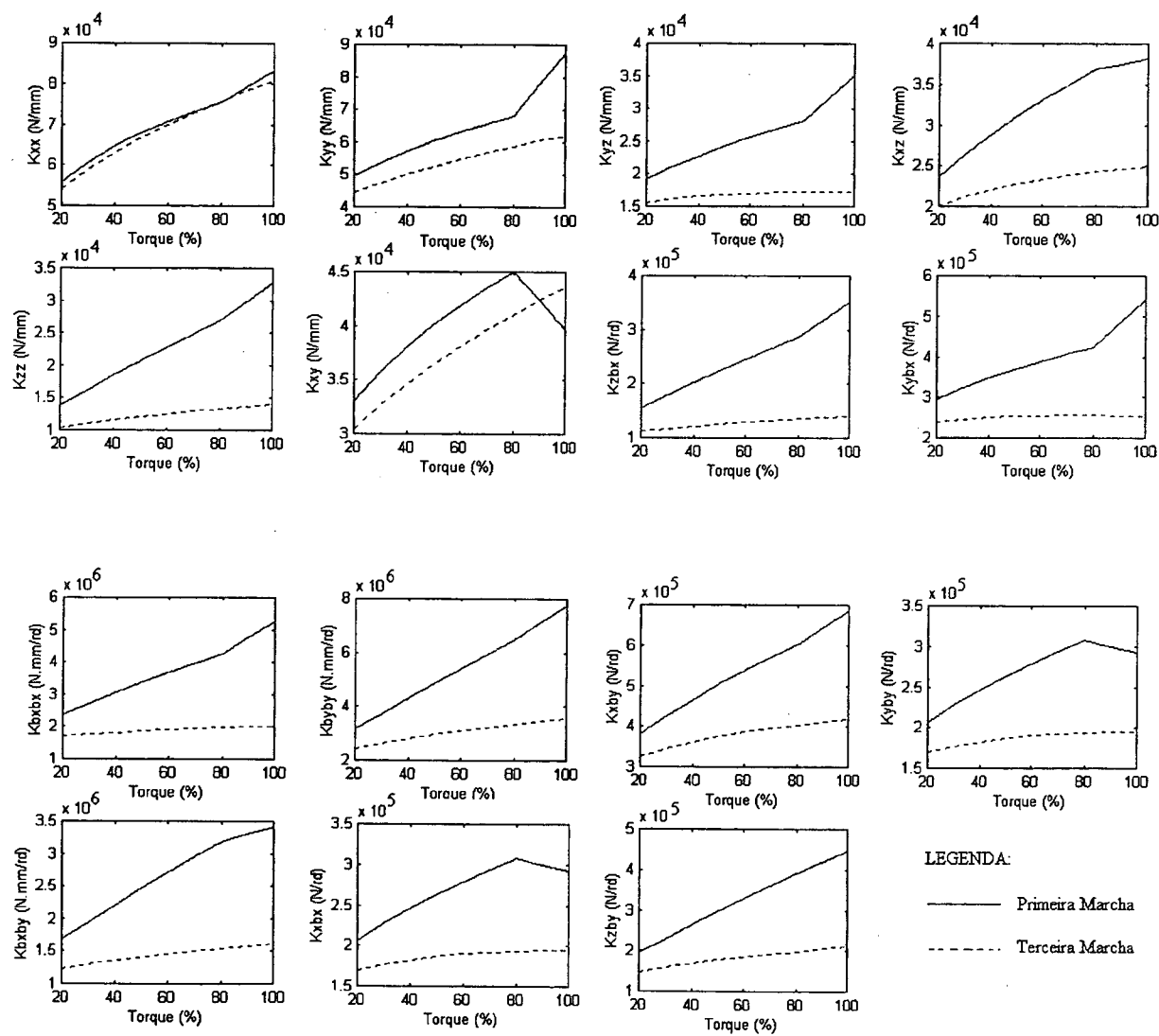


Figura 2.18 – Variação dos coeficientes de rigidez para o mancal B<sub>3</sub>

## 2.7 - ANÁLISE DOS RESULTADOS

Tendo por base os resultados apresentados nas Fig. 2.11 a 2.14 (subsistema principal) e Fig. 2.16 a 2.18 (subsistema secundário), é possível formular as seguintes observações:

- Os coeficientes de rigidez posicionados na diagonal principal ( $k_{xx}$ ,  $k_{yy}$ ,  $k_{zz}$ ,  $k_{\alpha\alpha\alpha\alpha}$ ,  $k_{\alpha y \alpha y}$ ), da matriz de rigidez  $\mathbf{K}_m$  do mancal, apresentam um crescimento com o aumento do torque aplicado no eixo piloto. Este comportamento foi mais significativo para os mancais do subsistema principal enquanto que, para o subsistema secundário, a variação foi pequena, principalmente, para os mancais de elementos rolantes do tipo rolo ( $B_1$  e  $B_2$ );
- Para os rolamentos de rolo (mancais  $B_4$ ,  $B_5$  e  $B_6$ ), do subsistema principal, a mudança de marcha teve pouca influência nos valores das constantes de rigidez relativas aos coeficientes da diagonal principal da matriz  $\mathbf{K}_m$ . Entretanto, no caso do subsistema secundário, esta influência foi bem significativa tanto nos rolamentos de rolo (mancais  $B_1$  e  $B_2$ ) como no de esfera (mancal  $B_3$ );
- De um modo geral, os coeficientes fora da diagonal principal da matriz  $\mathbf{K}_m$  são bastante influenciados pela condição de marcha engrenada, seja para os rolamentos de esfera ou de rolo, para ambos os subsistemas da caixa de engrenagem;
- A mudança de tendência nas curvas apresentadas na Fig. 2.18, referente ao mancal  $B_3$  (rolamento de esfera do subsistema secundário), para a condição de primeira marcha, pode ser explicada pelo fato de que um maior número de esferas passam a contribuir para o deslocamento do mancal, devido ao aumento do carregamento.

Como pode ser observado, a partir das Fig. 2.11 a 2.14 e Fig. 2.16 a 2.18, os valores dos coeficientes de rigidez, que representam o acoplamento entre os movimentos de rotação e translação, aqui representados pelos coeficientes fora da diagonal da matriz  $\mathbf{K}_m$  e por  $k_{\alpha\alpha\alpha\alpha}$  e  $k_{\alpha y \alpha y}$ , apresentam valores significativos e, assim sendo, não podem ser desprezados em uma análise de transmissibilidade de cargas e momentos. Deve-se ressaltar, ainda, que os modelos convencionais de mancais não são capazes de simular o efeito representados por estes coeficientes.

## **2.7 - COMENTÁRIOS FINAIS**

Neste capítulo foi apresentado um modelo de mancal de elementos rolantes que inclui todos os possíveis graus de liberdade de corpo rígido de um sistema de mancal. Uma aplicação do método de modelagem, para o sistema de transmissão da caixa de engrenagem de uso veicular, composto por eixos escalonados, engrenagens helicoidais e rolamentos de rolo e de esfera, mostrou que não só os elementos de rigidez dos mancais nas direções radiais e axial são importantes. Assim, a matriz de rigidez proposta neste capítulo permite que a transmissão de vibração através dos mancais seja simulada de modo mais realista, uma vez que possibilita o acoplamento dos movimentos de flexão do eixo com o alojamento e, em consequência, a previsão mais realista do movimento fora do plano do alojamento, que é o responsável pela radiação acústica da caixa de engrenagem.



## **CAPÍTULO 3**

### **MODELO DO ENGRENAMENTO**

#### **3.1 - INTRODUÇÃO**

Uma necessidade básica, encontrada no projeto de máquinas, é o dimensionamento de elementos que permitam a transmissão de movimento rotativo de um eixo para outro. As engrenagens constituem um dos melhores meios dentre os vários disponíveis para esta transmissão.

Engrenagens rígidas e perfeitas deveriam transmitir rotações uniformes. Contudo, perturbações relativas a estas condições idealizadas aparecem nas transmissões engrenadas sob carga, com ou sem geometrias perfeitas, o que provoca o aparecimento de vibração e ruído na transmissão. O problema é complexo, visto que a distribuição de carga, transmitida de uma engrenagem para outra, se dá ao longo da linha de ação das engrenagens existindo, ainda, o acoplamento entre os deslocamentos de translação e rotação do sistema, fazendo com que os movimentos de um rotor (conjunto eixo-engrenagem) produza forças sobre o outro. Como consequência, as vibrações torcionais e de flexão do sistema de transmissão são acopladas.

Neste capítulo, apresenta-se um modelo de engrenamento que permite o acoplamento entre as vibrações de torção e flexão, em sistemas de eixos engrenados, de tal modo que a representação deste efeito seja feita através de uma matriz de rigidez, que possa ser incorporada em modelos de elementos finitos, com o objetivo de se fazer uma análise dinâmica de rotores engrenados.

#### **3.2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

Diferentes tipos de modelos matemáticos foram desenvolvidos nas últimas cinco décadas, tendo por objetivo diferentes propósitos de análise, o que permitiu a produção de uma vasta literatura sobre o assunto.

Os modelos propostos por vários pesquisadores mostram considerável variação, não só nos efeitos incluídos mas, também, nas hipóteses feitas. Assim, embora seja difícil agrupar os modelos em categorias, uma boa classificação foi proposta por Ozguven e Houser [69] conforme a seguir apresentada:

- 1) Modelos Simples: nesta categoria agrupam-se os primeiros estudos que tinham por meta a aproximação empírica ou semi-empírica e modelos dinâmicos construídos para a determinação do Fator Dinâmico. Segundo Seireg e Houser [82], este parâmetro é definido como a relação entre a carga estática e a carga dinâmica que atua sobre o dente da engrenagem.
- 2) Modelos com Flexibilidade do Dente da Engrenagem: agrupam-se nesta categoria uma grande quantidade de modelos que negligenciam as flexibilidades torcional e lateral de eixos e mancais, levando-se em consideração somente a rigidez dos dentes em contato. Em tais modelos, geralmente, o sistema é representado por um sistema massa-mola com um único grau de liberdade que, em alguns casos, diz respeito a translação e, em outros, a rotação, como pode ser observado na Fig. 3.1.

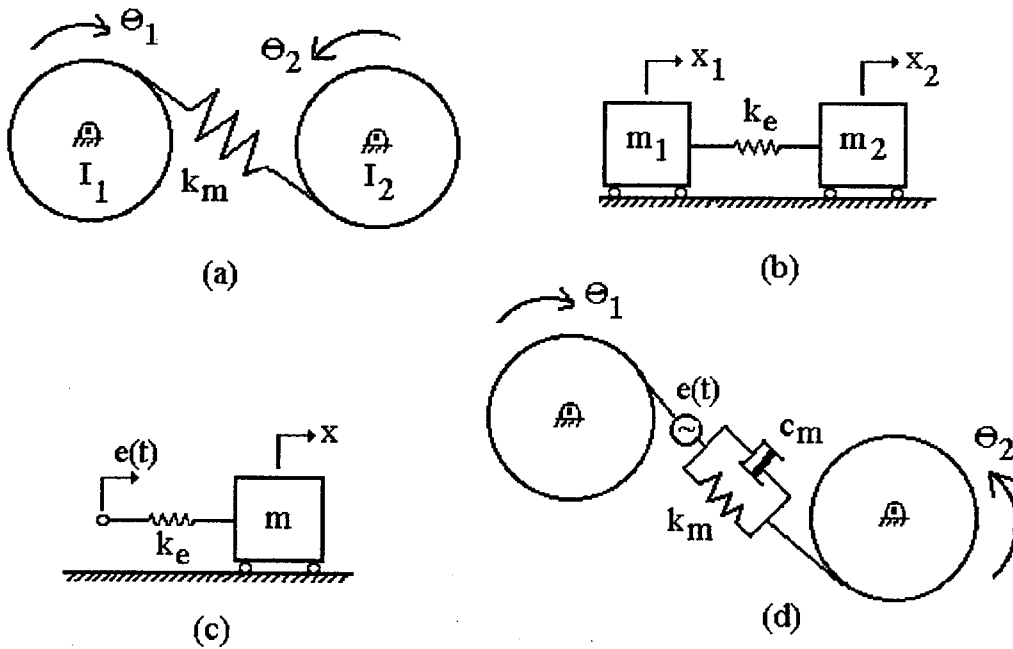


Figura 3.1 – Modelos de engrenamento com flexibilidade do dente da engrenagem [69].

- 3) Modelos para Dinâmica de Engrenagem: Em relação aos modelos do grupo 2 os desta categoria apresentam um abordagem mais abrangente do problema relacionado à análise dinâmica do sistema engrenado. Nos estudos que deram origem a estes modelos, além da flexibilidade do dente da engrenagem, são consideradas as flexibilidades dos outros elementos que compõem o sistema de transmissão, como mostrado na Fig. 3.2.

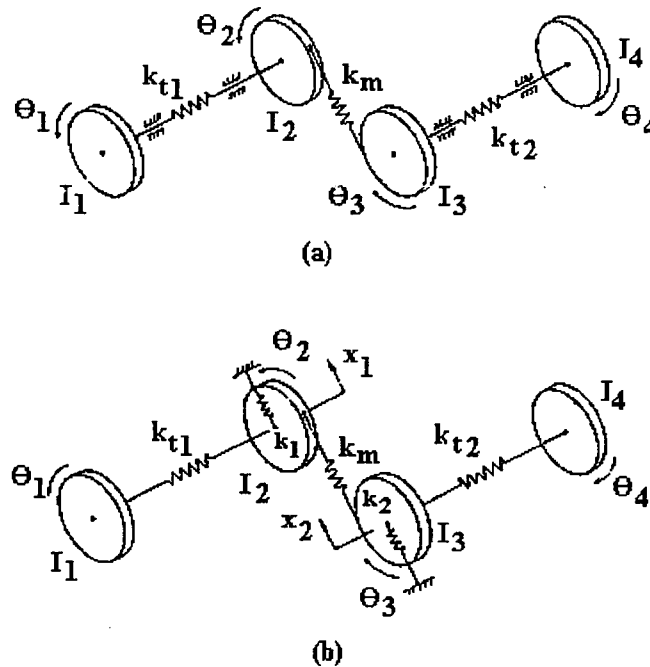


Figura 3.2 – Modelos para dinâmica de engrenagens [69].

- 4) Modelos para Dinâmica de Rotores: Neste grupo, os modelos consideram as vibrações transversais do conjunto mancal-eixo-engrenagem em duas direções mutuamente perpendiculares e, ainda, as vibrações torcionais.
- 5) Modelos para Vibração Torcional: aqui são agrupados os modelos em que a flexibilidade dos dentes das engrenagens é negligenciada. Os modelos deste grupo são para estudo de vibração torcional pura, em que o sistema é representado por eixos com rigidez torcional e as engrenagens por discos rígidos.

Uma descrição detalhada sobre os vários estudos, relacionados com a classificação acima, e uma vasta indicação bibliográfica, com 188 (cento e oitenta e oito) referências bibliográficas, podem ser encontradas no artigo de Ozguven e Houser [69]. De interesse aqui, são os modelos da categoria 2, tendo em mente que o objetivo principal é a representação dos desvios de comportamento do modelo idealizado de engrenagens em contato. Estes desvios são, geralmente, descritos e modelados pelo erro de transmissão introduzido primeiramente por Harris [26]. Seu trabalho, publicado em 1958, foi uma grande contribuição onde a importância do erro de transmissão foi discutida e modelos fotoelásticos foram usados. Em um modelo de um único grau de liberdade, Harris [26] considerou três fontes internas de vibração: erros de fabricação, variação na rigidez do dente e não linearidade na rigidez do dente devido a perda de contato. Ele

parece ter sido o primeiro a apontar a importância do erro de transmissão para mostrar que o comportamento de engrenagens de dentes retos, em baixas velocidades, pode ser resumido em um conjunto de curvas do erro de transmissão estático.

Modelos de erro de transmissão também são encontrados em artigos publicados por Remmers [77], Laskin [48] e Tavakoli e Houser [89]. Cada um destes modelos aproxima o dente da engrenagem como uma viga em balanço e incluem deflexões devido a flexão, cisalhamento e rotação da base do dente, bem como a deflexão Hertziana no contato dos dentes. Cornell [14] apresentou um resumo excelente da técnica usada para determinar estas deflexões.

Para engrenagens helicoidais, um procedimento muito bem aceito e que prediz a variação do erro de transmissão, com a rotação das engrenagens em contato, foi desenvolvido por Conry e Seireg [12]. O procedimento, por eles usado, prediz também a distribuição de carga ao longo da linha de contato e tem sido usado por outros pesquisadores, como no caso dos artigos de Kubo [44] e Ueno et. al [92].

Uma versão da aproximação de Conry e Seireg [12] foi incorporada em um programa denominado *Load Distribution Program* – LDP [23], desenvolvido no *Gear Dynamics and Gear Noise Research Laboratory* da *Ohio State University*, o qual foi usado neste trabalho para a determinação dos parâmetros principais do modelo aqui proposto, que são o erro de transmissão e a rigidez de engrenamento.

### **3.3 - FORMULAÇÃO TEÓRICA DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ENGRENAMENTO**

Embora existam diferentes modelos, para os objetivos deste capítulo, o modelo apresentado na Fig. 3.1 (d) é o mais indicado. Esse modelo simples, que tem sido usado por muitos pesquisadores, consiste de dois discos que representam as inércias das engrenagens, uma mola que representa a rigidez de engrenamento, um amortecedor para representar a perda de energia por fricção dos dentes e o erro de transmissão como fonte de excitação. Entretanto, neste trabalho, uma ampliação daquele modelo se faz necessária de modo a se aumentar o número de graus de liberdade do sistema, para permitir o acoplamento entre as vibrações de flexão com as vibrações torcionais do conjunto. Assim, o engrenamento típico será representado por um par de discos rígidos conectados por uma mola ao longo da linha de pressão, que é tangente aos círculos de base das engrenagens, considerando-se, além dos graus de liberdade de rotação, os deslocamentos de translação, segundo duas direções mutuamente perpendiculares, conforme o sistema de referência apresentado na Fig. 3.3. Neste modelo, o valor da rigidez de engrenamento

é assumido ser constante e a separação dos dentes não é considerada, visto que as engrenagens são assumidas estarem pesadamente carregadas.

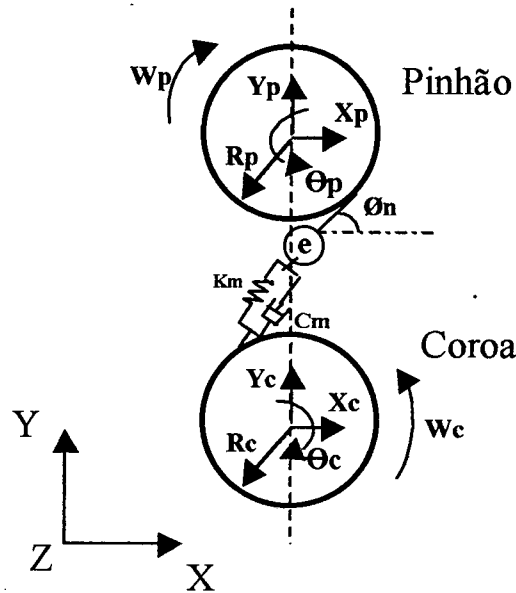


Figura 3.3 – Modelo do engrenamento.

A deformação da mola ao longo da direção, representada pelo ângulo de pressão transversal  $\phi_t$ , é dada pelas seguintes contribuições:

- 1) deslocamento relativo na direção Y ( $Y_p - Y_c$ )
- 2) deslocamento relativo na direção X ( $X_p - X_c$ )
- 3) contribuição devido às rotações das engrenagens ( $R_{bp} \theta_p - R_{bc} \theta_c$ ).

onde os índices p e c representam, respectivamente, pinhão e coroa;  $R_b$  denota o raio do círculo de base das engrenagens; X, Y e  $\theta$  os deslocamentos de translação e rotação relativos ao ponto de sustentação das engrenagens sobre o eixo.

As contribuições 1 e 2 devem ser projetadas ao longo da direção representada pelo ângulo de pressão transversal. Assim, pode-se escrever a seguinte expressão para a deformação da mola da Fig. 3.3:

$$\delta_m = (Y_p - Y_c) \sin \phi_t + (X_p - X_c) \cos \phi_t + R_{bp} \theta_p - R_{bc} \theta_c \quad (3.1)$$

Para o sistema mostrado na Fig. 3.3, as forças que atuam no engrenamento, segundo a direção do ângulo de pressão transversal, podem ser escritas como:

$$F_p = k_g \cdot \delta_m \quad (3.2)$$

$$F_c = -F_p \quad (3.3)$$

onde  $k_g$  é a rigidez de engrenamento;  $F_p$  e  $F_c$  são, respectivamente, as forças que atuam sobre o pinhão e a coroa. Estas forças podem ser decompostas em duas componentes, segundo as direções X e Y do sistema de referência, o que resulta nas seguintes equações:

$$F_p^x = k_g \cdot \delta_m \cdot \cos \phi_t \quad (3.4)$$

$$F_p^y = k_g \cdot \delta_m \cdot \sin \phi_t \quad (3.5)$$

$$F_c^x = -k_g \cdot \delta_m \cdot \cos \phi_t \quad (3.6)$$

$$F_c^y = -k_g \cdot \delta_m \cdot \sin \phi_t \quad (3.7)$$

As forças no engrenamento provocam também um momento sobre os centros das engrenagens que são dados por:

$$M_p^z = F_p \cdot R_{bp} \quad (3.8)$$

$$M_c^z = F_c \cdot R_{bc} \quad (3.9)$$

As equações (3.4) a (3.9) formam um sistema de equações que pode ser escrito na forma matricial estabelecendo, assim, a seguinte relação entre os vetores de deslocamento  $\mathbf{u} = [X_p \ Y_p \ \theta_p \ X_c \ Y_c \ \theta_c]^T$  e o de carga  $\mathbf{F} = [F_p^x \ F_p^y \ M_p^z \ F_c^x \ F_c^y \ M_c^z]^T$ :

$$\mathbf{K_e u} = \mathbf{F} \quad \text{com} \quad \mathbf{K_e} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ & & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ & & & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ \boxed{\text{Simétrica}} & & & & k_{55} & k_{56} \\ & & & & & k_{66} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

onde os coeficientes da matriz de rigidez  $\mathbf{K_e}$  são dados por:

$$k_{11} = k_g \cdot \cos^2 \phi_t \quad (3.11)$$

$$k_{12} = k_g \cdot \frac{\sin 2\phi_t}{2} \quad (3.12)$$

$$k_{13} = k_g \cdot R_{bp} \cdot \cos \phi_t \quad (3.13)$$

$$k_{14} = -k_g \cdot \cos^2 \phi_t \quad (3.14)$$

$$k_{15} = -k_g \cdot \frac{\sin 2\phi_t}{2} \quad (3.15)$$

$$k_{16} = -k_g \cdot R_{bc} \cdot \cos \phi_t \quad (3.16)$$

$$k_{22} = k_g \cdot \sin^2 \phi_t \quad (3.17)$$

$$k_{23} = k_g \cdot R_{bp} \cdot \sin \phi_t \quad (3.18)$$

$$k_{24} = -k_g \cdot \frac{\sin 2\phi_t}{2} \quad (3.19)$$

$$k_{25} = -k_g \cdot \sin^2 \phi_t \quad (3.20)$$

$$k_{26} = -k_g \cdot R_{bc} \cdot \text{sen}\phi_t \quad (3.21)$$

$$k_{33} = k_g \cdot R_{bp}^2 \quad (3.22)$$

$$k_{34} = -k_g \cdot R_{bp} \cdot \cos\phi_t \quad (3.23)$$

$$k_{35} = -k_g \cdot R_{bp} \cdot \text{sen}\phi_t \quad (3.24)$$

$$k_{36} = -k_g \cdot R_{bp} \cdot R_{bc} \quad (3.25)$$

$$k_{44} = k_g \cdot \cos^2\phi_t \quad (3.26)$$

$$k_{45} = k_g \cdot \frac{\text{sen}2\phi_t}{2} \quad (3.27)$$

$$k_{46} = k_g \cdot R_{bc} \cdot \cos\phi_t \quad (3.28)$$

$$k_{55} = k_g \cdot \text{sen}^2\phi_t \quad (3.29)$$

$$k_{56} = k_g \cdot R_{bc} \cdot \text{sen}\phi_t \quad (3.30)$$

$$k_{66} = k_g \cdot R_{bc}^2 \quad (3.31)$$

### 3.4 - METODOLOGIA PARA CÁLCULO DA RIGIDEZ DE ENGRENAMENTO E ERRO DE TRANSMISSÃO

O procedimento usado na determinação do erro de transmissão e rigidez de engrenamento é uma versão da aproximação proposta por Conry e Seireg [12] e usa um algoritmo simplex modificado para resolver um conjunto de equações de elasticidade linear, que descreve as



deflexões de pontos discretos ao longo do engrenamento. O programa **LDP** [23], que incorpora este procedimento, permite determinar a distribuição de carga pela zona de contato para um único par de engrenagens de dentes retos ou helicoidais. As engrenagens podem ter dentes internos ou externos e estarem montadas sobre o eixo em uma posição entre mancais ou em balanço. O modelo assume ser a distribuição de carga uma função da elasticidade do sistema e do erro ou modificações nos dentes das engrenagens. Abaixo estão listados os efeitos que são levados em conta pelo programa nos cálculos:

- 1) Deformação Elástica: deflexão por flexão dos corpos das engrenagens e eixos de suporte, flexibilidade dos mancais e alojamento, deflexões por torção do corpo das engrenagens, flexão dos dentes em contato e deflexões locais de contato.
- 2) Modificações e Erros nos Dentes: desalinhamento de eixos, modificações de perfil do dente, espaçamento entre dentes e modificações de *Lead*.

### **3.4.1 – Cálculo das Deformações Elásticas**

As seguintes hipóteses são usadas para o cálculo das deflexões elásticas [12]:

- 1) A deformação elástica total é a soma das deformações elásticas individuais.
- 2) O contato dos dentes é assumido permanecer na linha de contato, tendo por base pequenas deformações elásticas.
- 3) O corpo de cada uma das engrenagens comporta-se como cilindro sólido, no qual o diâmetro correspondente assume o valor do diâmetro primitivo da engrenagem.

Embora seja possível incluir as deformações de flexão dos eixos de sustentação e mancais, no nosso caso serão computadas apenas as deformações devido ao par de engrenagens em contato, uma vez que os efeitos de eixo e mancal serão considerados no modelo de elementos finitos apresentado no Capítulo 4.

#### **3.4.1.1 – Deformação Torcional do Corpo das Engrenagens**

Para o eixo de entrada de torque, o corpo da engrenagem é assumido ser fixo na extremidade oposta à posição de entrada do torque, que corresponde a  $X = 0$ . O modelo para

calcular a deformação torcional é mostrado na Fig. 3.4. Com base neste modelo, a deformação torcional ao longo da linha de ação, para um ponto em  $X$ , devido a carga  $P$  atuando em um ponto em  $\epsilon$  e um raio  $R_b$ , é dada por [23]:

$$\Delta_T = \frac{P R_b^2 (L - \epsilon)}{G J} \quad \text{para} \quad 0 \leq X \leq \epsilon \leq L \quad (3.32)$$

$$\Delta_T = \frac{P R_b^2 (L - X)}{G J} \quad \text{para} \quad 0 \leq \epsilon \leq X \leq L \quad (3.33)$$

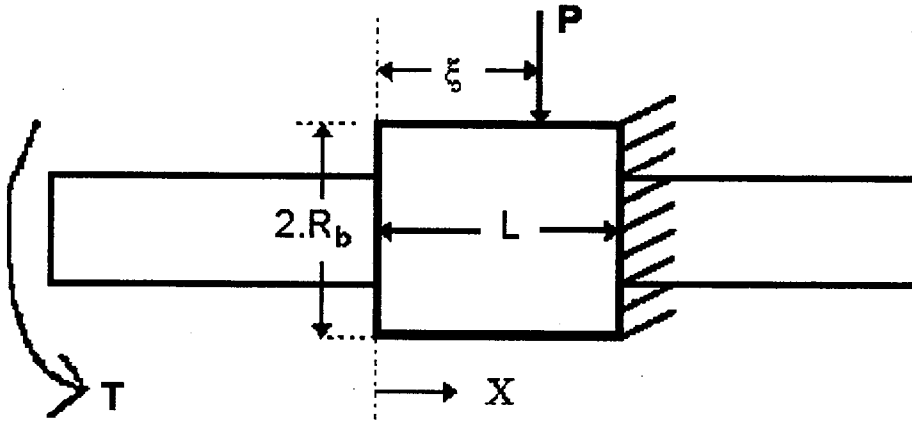


Figura 3.4 – Modelo para cálculo das deformações por torção: engrenagem de entrada [23].

Como anteriormente mencionado, o torque é sempre assumido entrar no lado  $X = 0$  da engrenagem de entrada. Entretanto, para a engrenagem de saída o torque pode sair em qualquer lado. Assim, quando o torque sai no lado que corresponde aquele da engrenagem de entrada as Eq. (3.32) e (3.33) se aplicam mas no caso contrário, ou seja no lado oposto como mostrado na Fig. 3.5, as equações a serem usadas são [23]:

$$\Delta_T = \frac{P R_b^2 X}{G J} \quad \text{para} \quad 0 \leq X \leq \epsilon \leq L \quad (3.34)$$

$$\Delta_T = \frac{P R_b^2 \epsilon}{G J} \quad \text{para} \quad 0 \leq \epsilon \leq X \leq L \quad (3.35)$$

onde  $P$  é a carga que atua no dente da engrenagem;  $R_b$  é o raio do círculo de base da engrenagem;  $G$  é o módulo de elasticidade transversal;  $J$  é o momento polar de inércia de área.

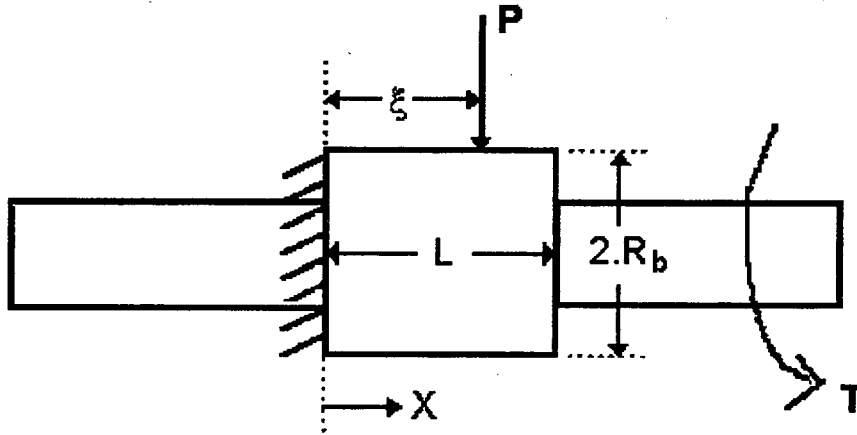


Figura 3.5 – Modelo para cálculo das deformações por torção: engrenagem de saída [23].

### 3.4.1.2 – Deformação do dente da Engrenagem

No cálculo das deformação do dente deve ser computadas as parcelas devido à flexão e cisalhamento do dente, bem como a deflexão e rotação da sua base. Assim, em uma primeira etapa, o dente é assumido ser uma placa plana e, para compensar os efeitos das deflexões devido ao cisalhamento, um fator de correção na faixa de 1.3 a 1.6 é usado. Posteriormente, uma correção para os efeitos da base do dente é aplicada.

A deformação de flexão dos dentes em contato é estimada usando um modelo de uma placa plana em balanço para a qual é assumida uma espessura constante correspondente a espessura da seção do dente localizada na metade da sua altura. O modelo, mostrado na Fig. 3.6, tem por base o artigo de Jaramillo [35], para uma placa infinitamente longa, e modificações feitas por Wellauer e Seireg [98], para uso com placas de comprimento finito.

A deflexão em um ponto  $A$ , devido a carga  $P$  atuando em um ponto  $B$ , ambos localizados a uma distância  $X_0$  da extremidade da placa, é obtida usando a seguinte equação [12]:

$$\Delta_F = \begin{cases} \delta \max. \left( 1 - \frac{|X - X_0|}{2h} \right) P & \text{se } |X - X_0| \leq 2.h \\ 0 & \text{se } |X - X_0| > 2.h \end{cases} \quad (3.36)$$

onde:

$$\delta_{\max} = \frac{h^2 \left( 0,2484 + 0,2727 \left( \frac{a}{h} \right)^2 \right) \left( \left( \frac{a}{h} \right)^2 + 1,61 \left( \frac{a}{h} \right)^{1,65} \left( \frac{b-a}{h} \right) \right)}{\pi \cdot D} \quad \text{se } 0 \leq b \leq a \quad (3.37)$$

$$\delta_{\max} = \frac{h^2 \left( 0,2484 + 0,2727 \left( \frac{b}{h} \right)^2 \right) \left( \left( \frac{b}{h} \right)^2 + 1,61 \left( \frac{b}{h} \right)^{1,65} \left( \frac{a-b}{h} \right) \right)}{\pi \cdot D} \quad \text{se } 0 \leq a \leq b \quad (3.38)$$

com

$$D = \frac{E \cdot t^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (3.39)$$

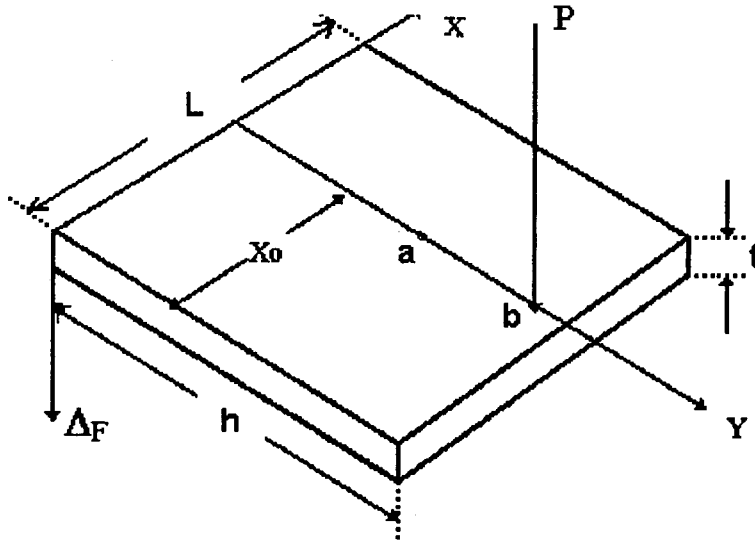


Figura 3.6 – Modelo de placa em balanço [12].

Quando a distância da extremidade ( $X_0$ ) é menor do que  $2h$ , a lei de imagem especular é empregada e parte da linha de deflexão, aquela que se estende além da extremidade da placa, é refletida. Este procedimento é esquematicamente mostrado na Fig. 3.7.

O modelo de placa plana, conforme aqui descrito, prediz deflexões que estão um pouco abaixo daquelas medidas ou das obtidas por método de elementos finitos, porque não considera os efeitos da flexibilidade do corpo da engrenagem na raiz do dente. Porém, a configuração do programa LDP [23] calcula a deflexão de rotação da base devido ao momento imposto sobre ela, bem como seu leve movimento de translação devido a força no dente. Este cálculo está baseado em um modelo de mola, desenvolvido por Stegemiller [87], e que é mostrado na Fig. 3.8.

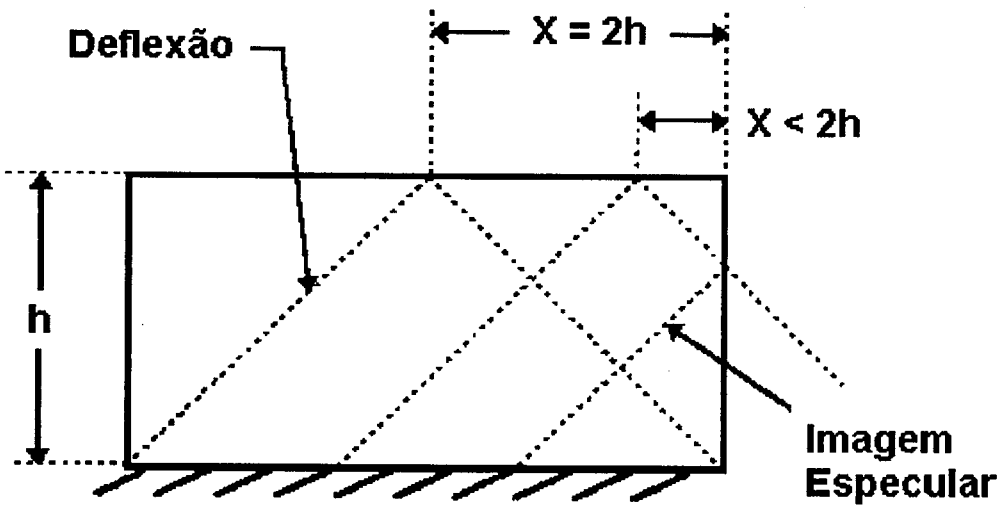


Figura 3. 7 – Efeito da imagem especular [23].

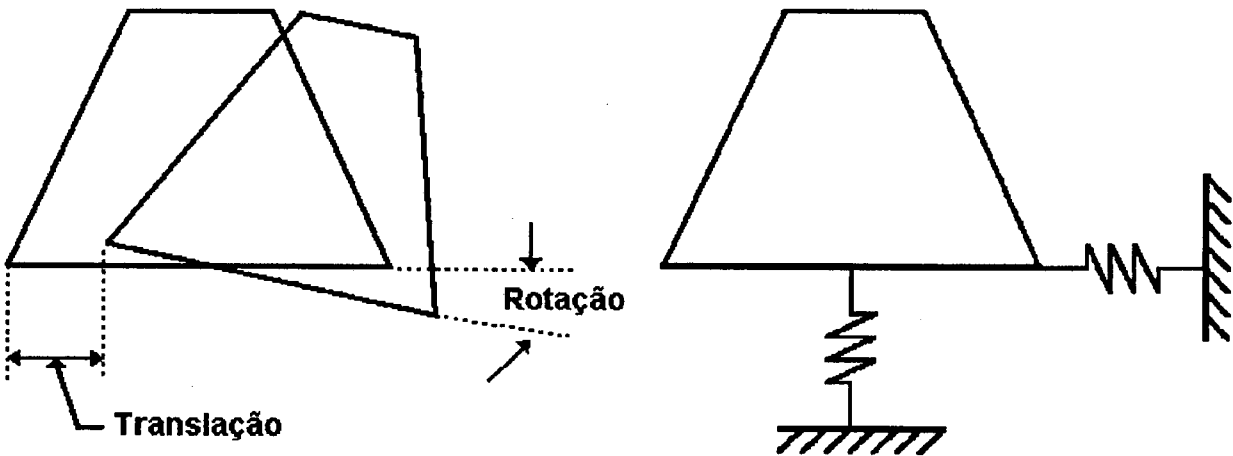


Figura 3.8 – Modelo de deflexão de rotação e translação da base do dente [23].

### 3.4.1.3 – Deformação de Contato dos Dentes

A determinação da deformação de contato, devida à flexibilidade local de contato, está baseada em um modelo analítico desenvolvido para dentes de engrenagens. A existência desta deformação é assumida apenas no ponto de aplicação da carga e seu valor é determinado através da seguinte equação, retirada do artigo de Cornell [14]:

$$\Delta_H = \frac{2.P}{\pi L_a} \left\{ \frac{1-v_1^2}{E_1} \left( \ln \left( \frac{2.h_1}{b} \right) - \frac{v_1}{2.(1-v_1)} \right) + \frac{1-v_2^2}{E_2} \left( \ln \left( \frac{2.h_2}{b} \right) - \frac{v_2}{2.(1-v_2)} \right) \right\} \quad (3.40)$$

onde  $\Delta_H$  é a deflexão devido ao contato Hertziano;  $P$  é a força atuando ao longo da linha de contato;  $L_a$  é o comprimento da linha de contato através da face do dente;  $v$  é o coeficiente de Poisson;  $E$  é o módulo de elasticidade;  $h$  é o comprimento entre o ponto de contato e a linha de centro do dente;  $b$  é metade do comprimento de contato de Hertz.

O valor de  $b$  a ser usado na Eq. (3.40) é obtido através da seguinte equação:

$$b = \sqrt{\frac{4.P}{\pi L_a} \left( \frac{1-v_1^2}{E_1} + \frac{1-v_2^2}{E_2} \right) \cdot \frac{r_1.r_2}{r_1+r_2}} \quad (3.41)$$

onde  $r$  é o raio de curvatura no ponto de contato.

Desde que o valor de  $b$  não pode ser computado sem se saber o valor da carga no dente, é assumido que a carga está distribuída uniformemente ao longo das linhas de contato, quando do cálculo inicial da deformação Hertziana. Assim, a distribuição de carga aproximada é achada pelo programa **LDP** e uma nova deformação Hertziana é calculada, usando-se esta distribuição de carga aproximada, e o programa recalcula a distribuição de carga. Geralmente, uma distribuição de carga aceitável é obtida com apenas uma única iteração.

### 3.4.2 – Modificações do Dente

As modificações especificadas para os dentes das engrenagens, que são independentes da carga aplicada e que mudam a localização da superfície dos dentes com relação ao dente com perfil evolvental perfeito, são modeladas como separações iniciais. Isto é, assume-se que os

dentes têm algum espaço entre eles anterior a uma aplicação da carga. Assim, as modificações, que se comportam como se houvesse uma retirada de material do dente, são modeladas como separações positivas e aquelas modificações, que se comportam como se existisse uma adição de material no dente, são modeladas como separações negativas, conforme ilustrado na Fig. 3.9.

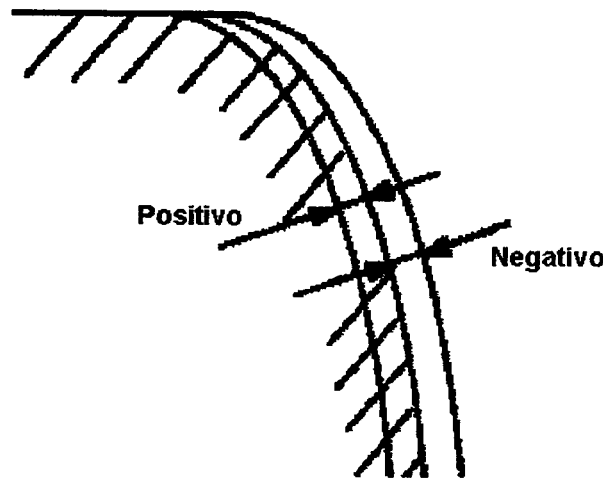


Figura 3.9 – Ilustração da separação inicial [23].

A modificação usada para as engrenagens helicoidais geralmente são do tipo cruzada, ou seja, uma combinação de modificações do perfil e de *Lead*, conforme mostrado na Fig. 3.10. O objetivo destas modificações é o de prevenir que a carga total atue em uma ou outra extremidade do dente.

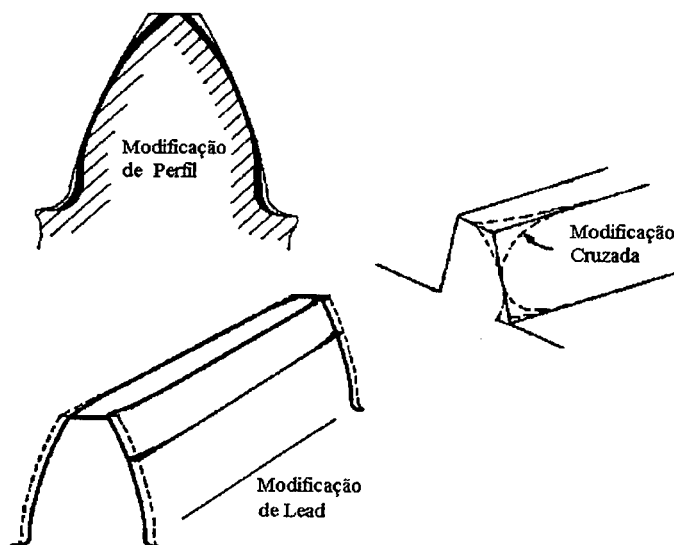


Figura 3.10 – Modificações do dente da engrenagem.

### 3.4.3 – Avaliação da Distribuição de Carga

A formulação do problema para a determinação da distribuição de carga na engrenagem está baseada no trabalho desenvolvido por Conry and Seireg [12], pertinente a corpos elásticos em contato. A distribuição de carga e a rotação de corpo rígido do sistema global podem ser obtidas partindo das informações dos seguintes parâmetros: flexibilidade de cada ponto na Zona de Contato, separações iniciais (ou aproximações) sob carga zero e a carga aplicada. Nesta formulação, as hipóteses assumidas são as seguintes:

- 1) Todas as deformações elásticas e forças atuam ao longo da linha de ação no plano transversal.
- 2) As posições de contato dos dentes são determinadas tendo por base dentes perfeitos.
- 3) Erros na superfície dos dentes são interpretados como separação ou aproximação iniciais.

Dois critérios são propostos para a formulação matemática da solução do problema. O primeiro, representa a condição de compatibilidade de deformação e estabelece a condição para que os pontos, localizados nos dentes das duas engrenagens, estejam em contato. O segundo, referente a condição de equilíbrio, assegura que a soma dos torques que atuam no sistema é nula. Assim, para qualquer ponto  $k$ , na Zona de Contato, a soma total das deformações elásticas e separações iniciais devem ser maior ou igual a aproximação de corpo rígido ao longo da linha de ação, dando origem a seguinte equação:

$$\delta_k^{(1)} + \delta_k^{(2)} + \xi_k \geq R_b \theta \quad (3.42)$$

onde  $\delta_k^{(1)}$  e  $\delta_k^{(2)}$  são, respectivamente, as deformações elásticas totais do ponto  $k$  nos corpos 1 e 2;  $\xi_k$  é a separação inicial no ponto  $k$  entre os corpos 1 e 2;  $R_b \theta$  é a aproximação de corpo rígido.

Tendo por base a condição de equilíbrio, a soma dos momentos sobre a linha de ação deve ser igual, mas de sentido contrário, ao torque aplicado. Esta condição é representada pela seguinte equação:

$$T = \sum_k F_k \cdot R_b \quad (3.43)$$



onde  $F_k$  é a força atuando no ponto  $k$  e  $T$  o torque aplicado.

A Eq. (3.42) pode ser transformada em uma equação de igualdade através da introdução de uma variável de folga  $Y_k$ , assumindo a seguinte expressão:

$$\delta_k^{(1)} + \delta_k^{(2)} + \xi_k - R_b \theta - Y_k = 0 \quad (3.42)$$

Consequentemente, se  $Y_k > 0$  os dois corpos não estão em contato no ponto  $k$  e  $F_k = 0$ . Por outro lado, se  $Y_k = 0$  o contato existe e  $F_k > 0$ . Assim, a solução para o problema de distribuição de carga pode ser estabelecido como segue:

**Determine os valores de  $F$ ,  $Y$  e  $\theta$  tal que:**

$$-SF + R_b \theta \mathbf{i} + \mathbf{I}Y = \xi \quad (3.43)$$

e

$$\mathbf{i}^t \mathbf{F} R_b = T \quad (3.44)$$

onde  $S$  é a matriz de coeficientes de influência;  $F$  é o vetor de forças;  $\varepsilon = R_b \theta$  é o erro de transmissão;  $\mathbf{i}$  é um vetor de elementos unitários;  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade;  $Y$  é o vetor da variável de folga;  $\xi$  é o vetor de separações iniciais;  $\mathbf{i}^t$  é o transposto do vetor  $\mathbf{i}$ .

O algoritmo para resolver o sistema de equações representado pelas Eq. (3.43) e (3.44) é uma modificação do método Simplex para programação linear e é descrito na referência [13].

### 3.5 - RIGIDEZ DE ENGRENAMENTO E ERRO DE TRANSMISSÃO PARA OS PARES DE ENGRENAGEM HELICOIDAIS DA CAIXA DE ENGRENAGEM

A determinação dos valores de rigidez de engrenamento e erro de transmissão, para os pares de engrenagens de entrada, 1ª e 3ª marchas, foi feita no *Gear Dynamics and Gear Noise Research Laboratory* da *Ohio State University-USA*, através da participação efetiva do Professor e PhD Donald R. Houser, Diretor do Centro para Pesquisa Automotiva daquela Universidade. Nesta determinação, foi usado o programa **LDP** [23] com as propriedades de material do aço

SAE 4135 H, usado na fabricação das engrenagens, e os parâmetros apresentados na tabela 3.1, que caracterizam a geometria de cada um dos pares de engrenagens anteriormente citadas.

Tabela 3.1 – Dados básicos para os pares de engrenagem usados.

| PARÂMETROS           | PARES DE ENGRENAGENS |           |           |
|----------------------|----------------------|-----------|-----------|
|                      | ENTRADA              | 1ª MARCHA | 3ª MARCHA |
| Número de Dentes     | 26 - 37              | 15 - 43   | 29 - 30   |
| Módulo Normal        | 2,20                 | 2,60      | 2,40      |
| Âng. de Pres. Normal | 14,50°               | 14,50°    | 14,50°    |
| Ângulo de Hélice     | 33,00°               | 19,00°    | 31,00°    |

A obtenção dos valores de rigidez do engrenamento e erro de transmissão foi feita para valores de torque de entrada distintos, relativos a 20%, 50% e 100% do torque máximo de projeto, para a caixa de engrenagem, bem como formas de dentes diferentes, com o objetivo de se verificarem as alterações impostas àqueles parâmetros devidas às modificações de perfil e de *Lead*. Assim, inicialmente os dentes das engrenagens foram assumidos ter um perfil evolvental perfeito e, posteriormente, foram alterados por modificações de perfil e *Lead*, conforme mostrado nas Fig. 3.11 a 3.16, para os pares de engrenagem de entrada, 1ª e 3ª marchas, respectivamente.

Tendo por base a periodicidade da variação do erro de transmissão no tempo, é possível obter uma aproximação para este parâmetro, no domínio da frequência, através do uso da série de Fourier. Assim, pode-se fazer uma estimativa dos níveis de excitação vibratória no engrenamento, devida à frequência de engrenamento e seus harmônicos. As Fig. 3.17, 3.18 e 3.19 apresentam a variação do erro de transmissão, para cada um dos pares de engrenagens mencionados anteriormente, bem como a aproximação da curva obtida pelas componentes harmônicas da série de Fourier. Esta aproximação foi feita, com base nos cinco primeiros harmônicos da frequência de engrenamento, de tal modo que uma boa concordância das curvas originais foi obtida, conforme mostrado nas Fig. 3.17, 3.18 e 3.19.

A tabela 3.2 apresenta as informações sobre rigidez de engrenamento, segundo os valores de torque considerados e que correspondem a um percentual do torque total de 420 N.m. Nesta tabela, é possível perceber a variação da rigidez de engrenamento para a modificação do torque de entrada, bem como para a mudança do formato do dente. As tendências verificadas são a de

aumento da rigidez de engrenamento, com o aumento do torque de entrada, e diminuição do seu valor, com a modificação da forma do dente.

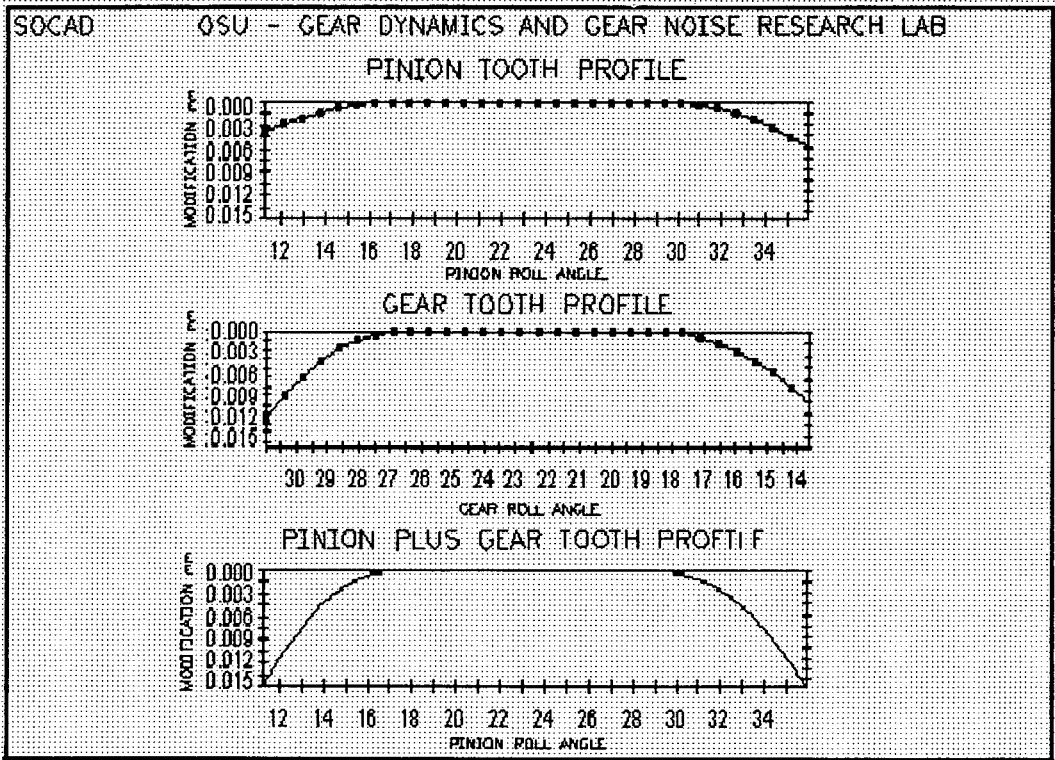


Figura 3.11 – Modificação de perfil para o par de engrenagens de entrada.

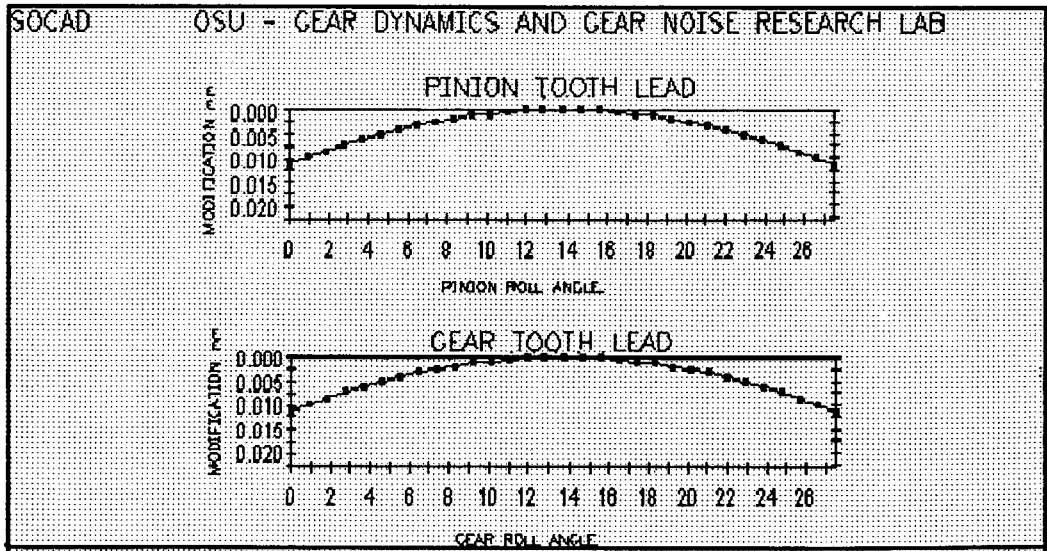


Figura 3.12 – Modificação de *Lead* para o par de engrenagens de entrada.

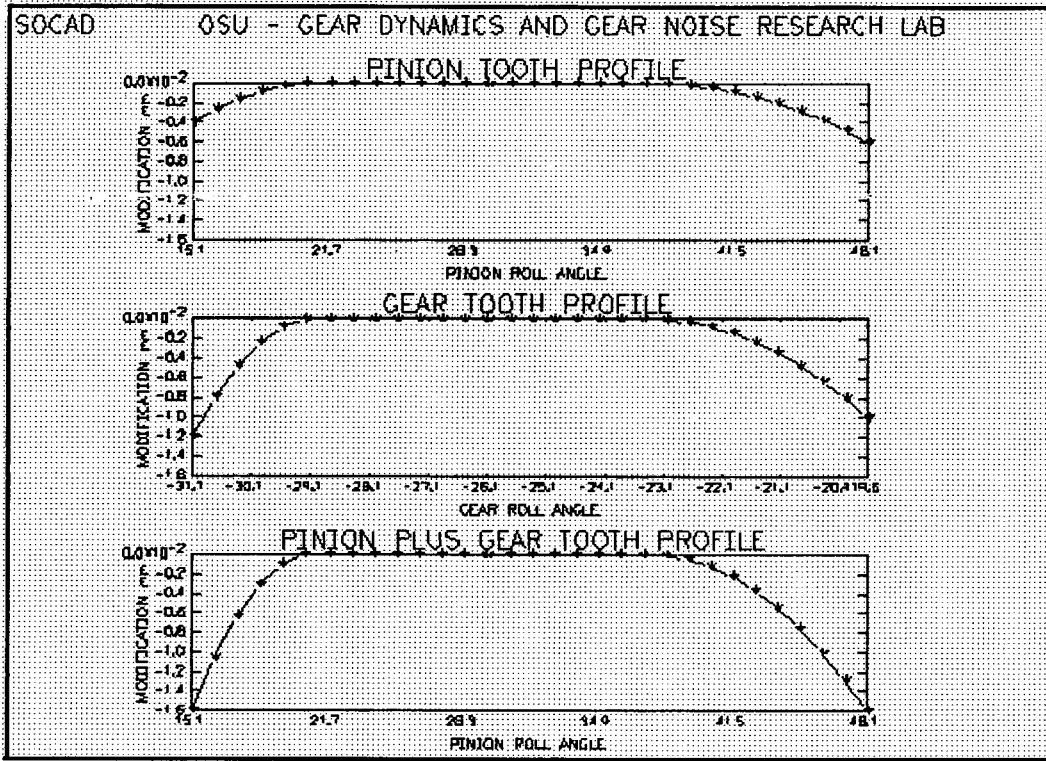


Figura 3.13 – Modificação de perfil para o par de 1ª marcha.

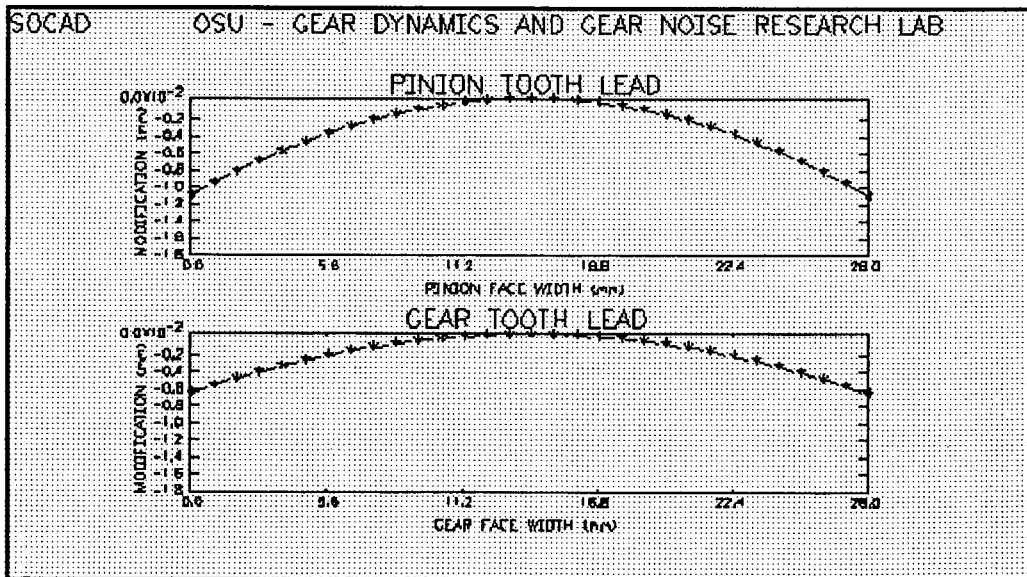


Figura 3.14 – Modificação de *Lead* para o par de 1ª marcha.

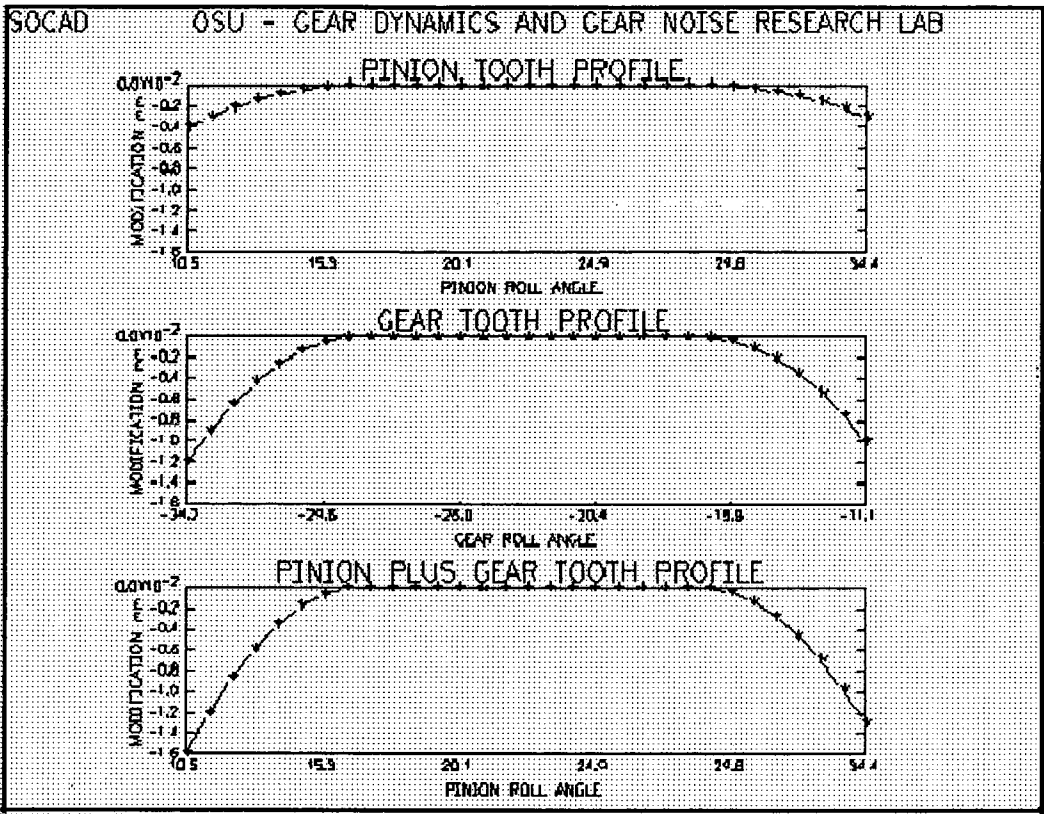


Figura 3.15 – Modificação de perfil para o par de 3ª marcha.

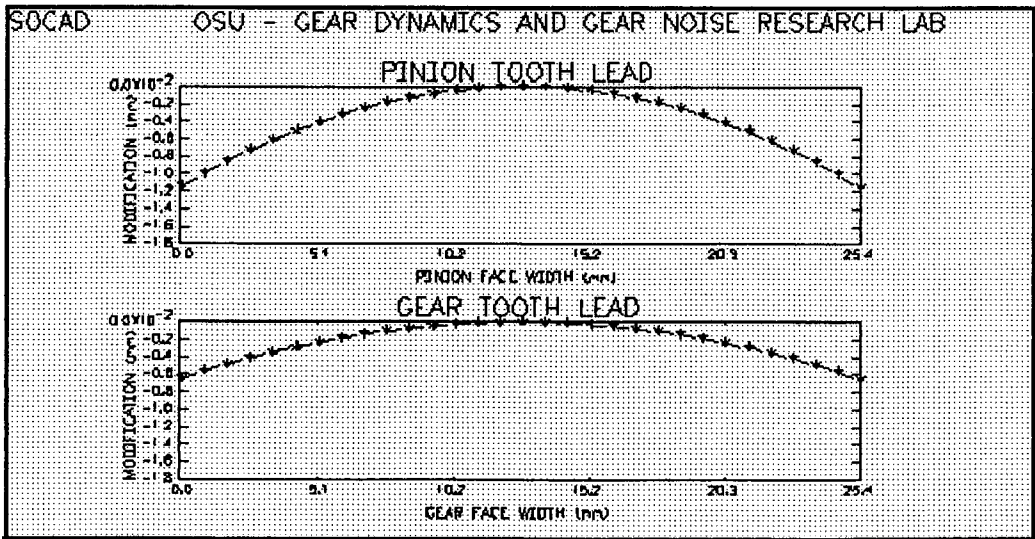


Figura 3.16 – Modificação de *Lead* para o par de 3ª marcha.

Tabela 3.2 – Valores Médios da Rigidez de Engrenamento (MN/m).

| TORQUE | DENTE      | PARES DE ENGRENAGENS |           |           |
|--------|------------|----------------------|-----------|-----------|
|        |            | ENTRADA              | 1ª MARCHA | 3ª MARCHA |
| 20 %   | Padrão     | 505,67               | 518,58    | 445,85    |
|        | Modificado | 298,67               | 417,35    | 307,34    |
| 50 %   | Padrão     | 517,92               | 536,83    | 455,66    |
|        | Modificada | 405,71               | 514,85    | 401,20    |
| 100 %  | Padrão     | 527,67               | 551,64    | 463,43    |
|        | Modificada | 485,58               | 545,57    | 448,05    |

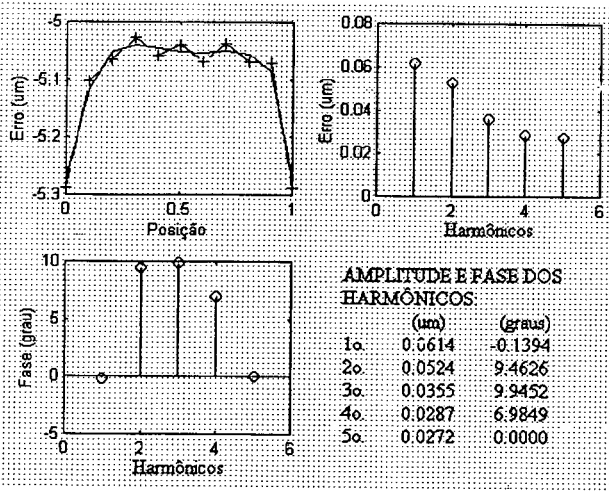
### 3.6 - COMENTÁRIOS FINAIS

Neste capítulo, foi desenvolvido um modelo de engrenamento que permite o acoplamento entre as vibrações de torção e flexão, que têm origem no engrenamento. Como consequência, uma matriz de rigidez de ordem 6x6 foi determinada, cujos elementos dependem de parâmetros geométricos das engrenagens em contato e da rigidez de engrenamento, permitindo que o modelo seja implementado em programas de elementos finitos comerciais, como uma matriz de rigidez generalizada, conforme será apresentado no Capítulo 4.

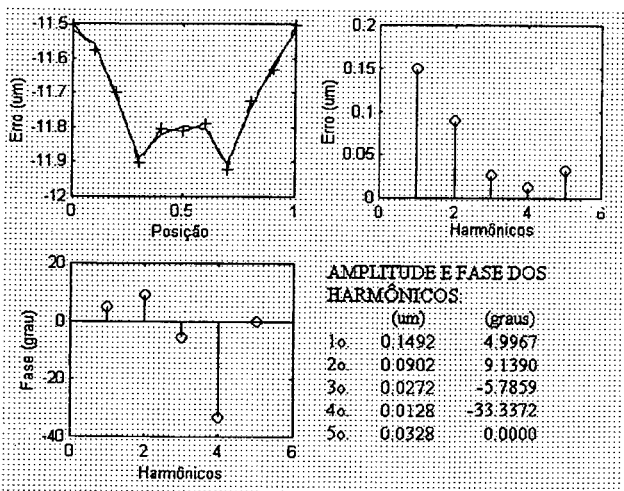
Na concepção do modelo, a separação dos dentes não foi considerada e as engrenagens foram modeladas por um par de discos rígidos conectados por uma mola de rigidez constante e igual ao valor médio da rigidez de engrenamento. Embora esta rigidez tenha sido considerada constante, o efeito da excitação variável, característica do engrenamento, foi considerado através do uso de uma excitação de deslocamento representada pelo erro de transmissão estático.

As etapas para a determinação dos parâmetros que descrevem o engrenamento, ou seja o erro de transmissão estático e a rigidez de engrenamento, foram apresentadas e aplicadas aos pares de engrenagens, que compõem a transmissão de uma caixa de engrenagem comercial, para as condições de formas de dentes de perfil evolvental padrão e modificado.

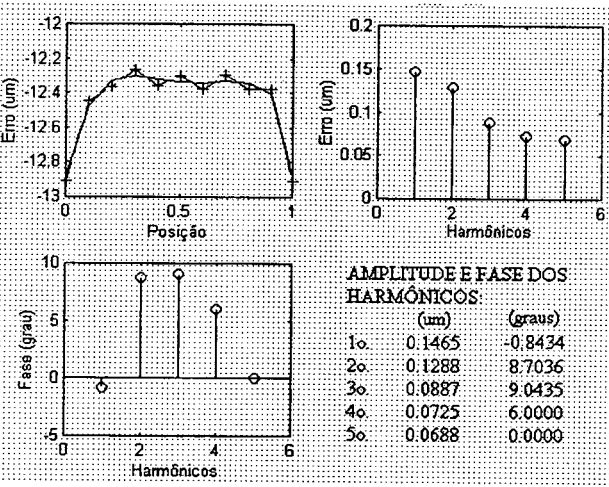
Os resultados obtidos mostram que apenas os cinco primeiros harmônicos da frequência de engrenamento são suficiente para representar o erro de transmissão estático e que a rigidez de engrenamento cresce com o aumento do torque aplicado e decresce com a alteração da forma do dente da engrenagem.



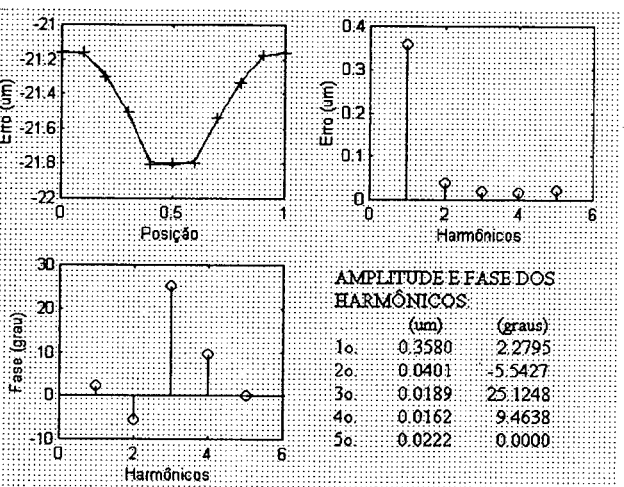
a) Padrão - Torque de 84 N.m



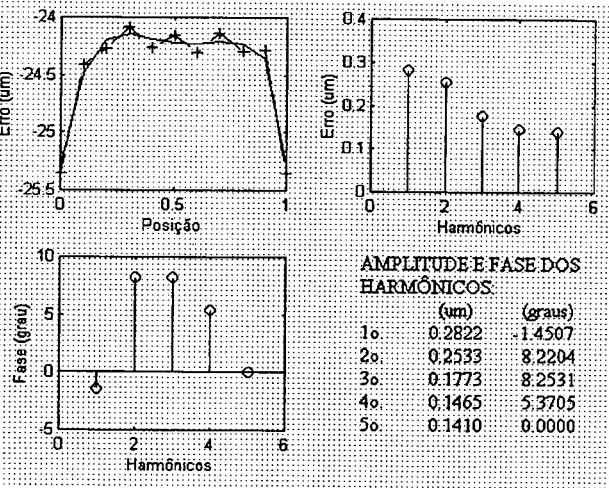
d) Modificado – Torque de 84 N.m



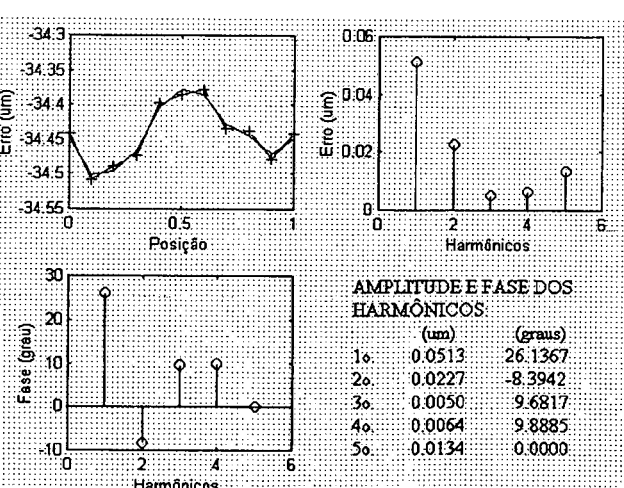
b) Padrão – Torque de 210 N.m



e) Modificado – Torque de 210 N.m



c) Padrão – Torque de 420 N.m



f) Modificado – Torque de 420 N.m

Figura 3.17 – Erro de transmissão para o par de engrenagens neutras, perfis de dentes e torques distintos. (—) Curva Real e (\*--\*--\*) Aproximação de Fourier.

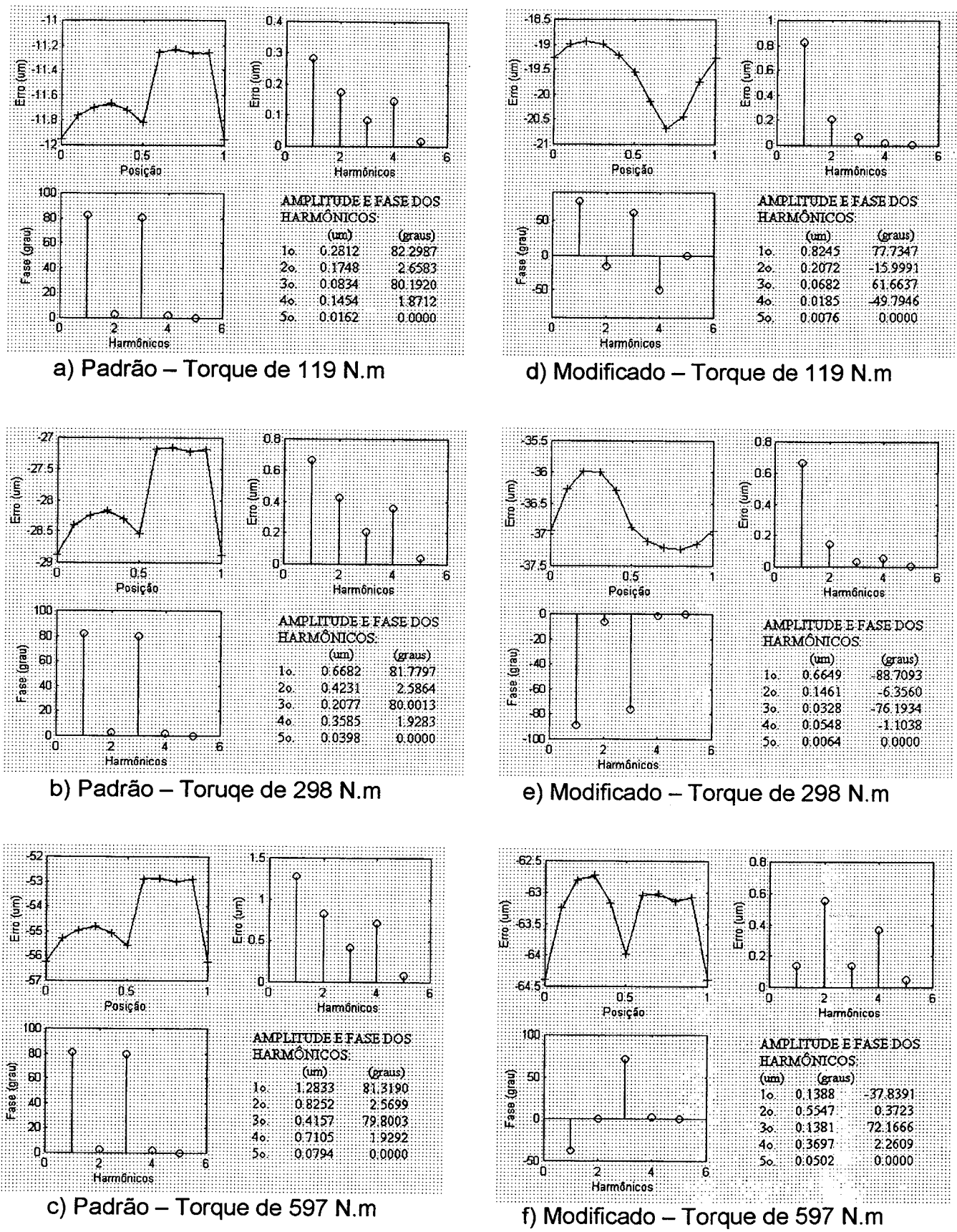
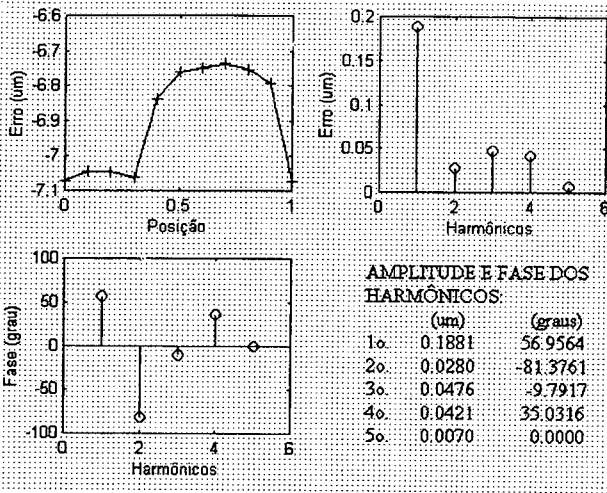
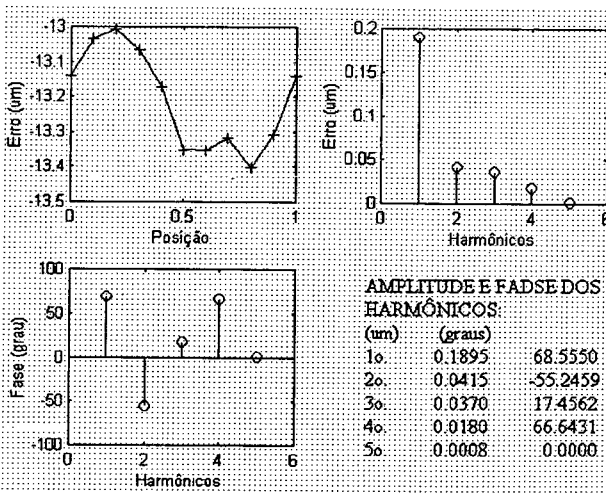


Figura 3.18 – Erro de transmissão para o par de engrenagens de 1ª marcha, perfis de dentes e torques distintos. (—) Curva Real e (\*--\*--\*) Aproximação de Fourier.

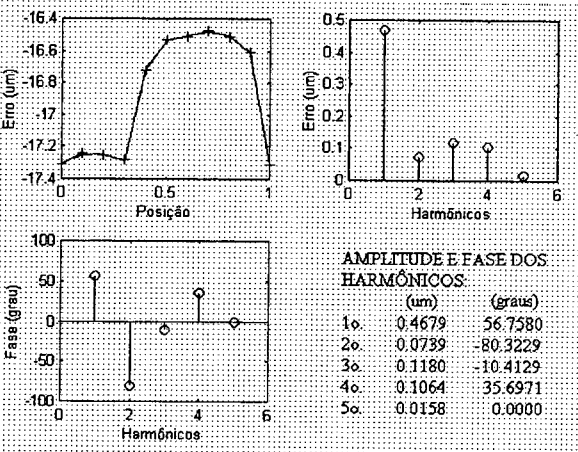




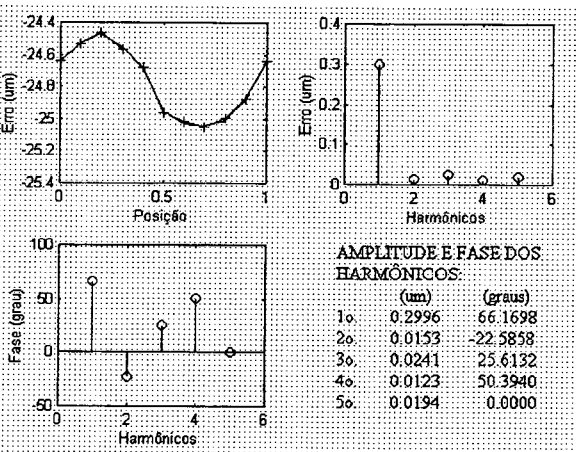
a) Padrão – Torque de 119 N.m



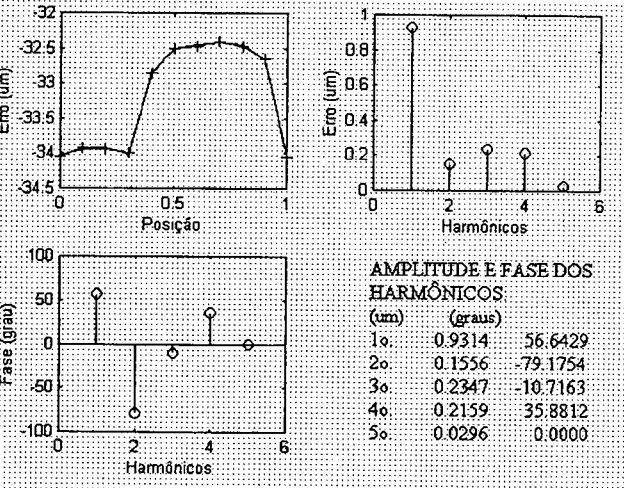
d) Modificada – Torque de 119 N.m



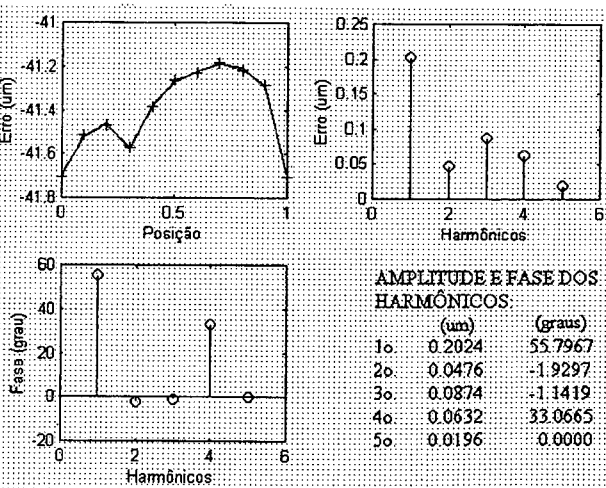
b) Padrão – Torque de 298 N.m



e) Modificada – Torque de 298 N.m



c) Padrão – Torque de 597 N.m



f) Modificada – Torque de 597 N.m

Figura 3.19 – Erro de transmissão para o par de engrenagens de 3ª marcha, perfis de dentes e torques distintos. (—) Curva Real e (\*--\*) Aproximação de Fourier.

## **CAPÍTULO 4**

### **MODELO DE SISTEMA DE EIXOS ENGRENADOS**

#### **4.1 - INTRODUÇÃO**

As vibrações e ruídos são problemas comuns, na operação de um sistema de eixos engrenados, e de certa complexidade devida ao fato do acoplamento que existe entre as vibrações de torção e flexão. Os modelos dinâmicos convencionais de sistemas engrenados incluem geralmente o sistema rotativo interno e, em alguns casos, modelos simples de mancais. Esses modelos são ainda inadequados, uma vez que a representação dos mancais somente leva em conta a sua rigidez de translação, o que permite apenas predições das excitações que atuam no plano da superfície do alojamento.

Neste capítulo, o sistema de eixos engrenados é modelado usando o método de elementos finitos. O efeito do acoplamento entre as vibrações de torção e flexão dos eixos é incorporado no modelo através de uma matriz de rigidez, que representa o engrenamento por um elemento elástico de rigidez linear invariante no tempo, e a flexibilidade dos mancais de elementos rolantes é considerada usando-se uma matriz quadrada que permite a transmissão de forças e momentos para a superfície do alojamento, o qual é considerado rígido para uma primeira aproximação. Os resultados de uma análise forçada são apresentados, tendo por base o sistema de eixos engrenados da caixa de engrenagem de uso comercial usada como exemplo, para duas situações distintas de operação, tendo como excitação o erro de engrenamento estático.

#### **4.2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

O ruído gerado por sistemas engrenados tem sido motivo de preocupação da comunidade de engenheiros, uma vez que altos níveis de ruído podem causar problemas humanos e, por outro lado, podem servir como sintoma de problemas mecânicos.

Muitos pesquisadores têm investigado o problema de ruído em sistemas mecânicos, como pode ser constatado em Houser [29]. Em grande parte dessas pesquisas o alvo de abordagem diz respeito a problemas específicos relacionados com a engrenagem, os quais dão origem a problemas de ruído, tais como: erro de perfil do dente, variações de rigidez do dente, ressonância do corpo, etc. Isso produziu muitas informações úteis que levaram a melhorar os

níveis de ruído em caixas de engrenagem. Contudo, uma atenção especial precisa ser dada para a investigação da resposta dinâmica dos componentes internos da caixa de engrenagem, uma vez que ela está diretamente relacionada ao ruído gerado. Assim, visto que as engrenagens estão geralmente montadas em eixos que são suportados por mancais, o problema da predição de ruído de caixa de engrenagem torna-se um problema de mecânica de rotores.

No passado, o estudo da dinâmica de sistemas engrenados foi feito tendo por base modelos torcionais, negligenciando as vibrações laterais de eixos e mancais. Entretanto, Mitchell e Mellen [58] observaram, experimentalmente, que o acoplamento dinâmico entre as vibrações transversais e torcionais, devido ao engrenamento, afeta significativamente o comportamento do sistema quando os eixos apresentam alta flexibilidade.

Lund [54] desenvolveu um modelo simples para estudar as velocidades críticas, estabilidade e resposta forçada de um rotor engrenado. Sua análise se baseou no desenvolvimento de um conjunto de coeficientes de influência em cada engrenamento, usando o método de Holser para vibrações torcionais e o método de Myklestad-Prohl para vibrações laterais, bem como na hipótese de um comportamento linear do modelo. Os resultados foram acoplados através da igualdade de impedância nos engrenamentos. Em sua análise, ele assumiu a rigidez de engrenamento constante e tratou os termos de excitação, representados pelo erro de transmissão ou pela quantidade de massa desbalanceada, como se tivessem a mesma frequência.

Daws [16], em sua tese de Ph.D. publicada em 1979, apresenta uma investigação analítica de vibração tri-dimensional em sistemas de rotores engrenados. Sua investigação foi baseada em um modelo matemático de um disco rígido, um elemento de eixo e um mancal hidrodinâmico, com a inclusão de uma ação tridimensional do engrenamento de um par de engrenagens. O acoplamento causado pela interação das deflexões das engrenagens foi incorporado no modelo e a resposta forçada do sistema foi obtida com base nas excitações provenientes do desbalanceamento do rotor e erro de engrenamento. O método da matriz de transferência, estendido para aplicação em sistemas engrenados ramificados, foi usado para obter a solução do problema.

Buckens [8] desenvolveu um modelo com base na hipótese de que as engrenagens estão sempre em contato e, embora ele tenha feito várias hipóteses simplificadoras, o seu modelo levou em conta a elasticidade dos mancais, dos eixos e o amortecimento devido ao atrito no contato dos dentes das engrenagens.

Iida et al [32] apresentou uma investigação de vibrações torcionais e de flexão acopladas num sistema de eixos engrenados. Em seu artigo, ele analisou um sistema de dois eixos paralelos

com um par de engrenagens de dentes retos, em contato permanente dos dentes, e os efeitos giroscópicos foram negligenciados. Sua formulação permitiu a determinação de frequências naturais e formas modais, bem como a resposta forçada devida à excentricidade e ao desbalanceamento de massa das engrenagens.

Neriya et al [62] estudaram a carga dinâmica sobre os dentes de engrenagem considerando o acoplamento entre as vibrações de torção e flexão em um sistema simples de eixos engrenados, submetido à excitação devida ao desbalanceamento de massa e à excentricidade geométrica das engrenagens. Eles modelaram uma engrenagem como um sistema massa-mola composto de duas massas, duas molas e dois amortecedores, um conjunto massa-mola-amortecedor representando o dente da engrenagem e o outro a própria engrenagem. Eles assumiram eixos sem massa e incluíram as suas características de rigidez lateral e torcional usando um modelo discreto equivalente.

Sener e Ozguven [83] estudaram as forças dinâmicas do engrenamento e fatores dinâmicos, num sistema de eixos engrenados, usando um modelo de sistema contínuo. O sistema estudado era constituído de um par de engrenagens, dois eixos e duas inércias para representar a carga e o acionamento do sistema. Os resultados obtidos na análise do modelo foram comparados com outros obtidos por um modelo discreto de quatro graus de liberdade, no qual as massas dos eixos foram ignoradas. A comparação dos resultados mostra que os fatores dinâmicos, obtidos pelo modelo discreto, são maiores do que aqueles obtidos pelo modelo contínuo, principalmente, quando os eixos apresentam valores altos de massa.

Embora vários modelos e técnicas de solução, tais como modelos de massa concentrada e matriz de transferência, tenham sido aplicados aos problemas da dinâmica de rotores, o método de elementos finitos parece ser uma forma eficiente de modelar tais sistemas. Em um dos primeiros exemplos do método de elementos finitos, Nelson e McVaugh [60] usaram um elemento finito de viga de Rayleigh incluindo os efeitos de inércia de translação e rotação, momentos giroscópicos e cargas axiais. Mais tarde, Nelson [61] desenvolveu a teoria da viga de Timoshenko adicionando deformação por cisalhamento à teoria da viga de Rayleigh. Esse modelo foi estendido por Ozguven e Ozkan [70] para incluir os efeitos de inércia rotativa e de translação, momentos giroscópicos, carga axial, histerese interna e amortecimento viscoso, e deformação por cisalhamento em um único modelo. Entretanto, nenhum desses modelos é capaz de analisar sistemas de rotores engrenados, embora sejam capazes de determinar o comportamento dinâmico de rotores que consistem de um eixo suportado em vários pontos e que suporta discos rígidos em várias posições.

Neriya et al. [63], complementando a formulação publicada na referência [62], fizeram uso do método de elementos finitos para o estudo das vibrações de torção e flexão acopladas de um sistema de eixos engrenados e verificaram que aquela formulação é muito útil na análise dinâmica de rotores engrenados, visto que a ação de acoplamento do par de engrenagem pode ser facilmente incorporada nas matrizes de massa e rigidez. Nesse estudo, a rigidez de engrenamento foi assumida como constante e as frequências naturais, do modelo linear resultante, foram determinadas. A resposta forçada do sistema devida ao desbalanceamento de massa e à excentricidade geométrica das engrenagens foi obtida a partir dos modos não amortecidos do sistema e valores de amortecimento modal equivalentes.

Velex e Berthe [94] desenvolveram estudo com base em um modelo modular para a investigação do comportamento dinâmico de unidades de engrenagens de dentes retos e helicoidais. Com o objetivo de estudar o acoplamento dinâmico, carregamento nos dentes das engrenagens e discutir parâmetros de projeto, eles investigaram um sistema composto de um motor de acionamento, uma máquina acionada e dois eixos flexíveis suportados por mancais hidrodinâmicos, conectados através de um par de engrenagens, sendo que a influência desses componentes foram incluídas através da análise de elementos finitos.

Finalmente, Kahraman et al. [38] apresentam um modelo de elementos finitos para a análise dinâmica de rotores engrenados, no qual são considerados os efeitos de flexibilidade, amortecimento do material e inércia rotativa dos eixos, bem como a flexibilidade e amortecimento dos mancais. O acoplamento das vibrações de torção e flexão é considerado e a hipótese de rigidez de engrenamento constante é assumida. O procedimento usado permite a análise de vibração forçada, de rotores engrenados, calculando as velocidades críticas e determinando a resposta de qualquer ponto sobre os eixos devido a desbalanceamento de massa, excentricidade geométrica das engrenagens e erro de transmissão estática.

Neste trabalho será usado o método de elementos finitos e o modelo concebido incorporará o acoplamento entre as vibrações laterais e torcionais, a flexibilidade dos mancais e a excitação representada pelo erro de transmissão e rigidez do engrenamento, de modo a permitir a utilização de um programa comercial de elementos finitos (ANSYS V. 5.4).

#### **4.3 – HIPÓTESES E CONCEPÇÃO DO MODELO DE ELEMENTOS FINITOS**

A análise dinâmica de um sistema de rotores engrenados, em sua grande maioria, é baseada em uma concepção de sistema conforme mostrado na Fig. 4.1. Assim, o sistema é concebido de tal modo que aos eixos de entrada e saída de movimento são acopladas,

respectivamente, inércias rotativas referentes ao motor de acionamento e a carga imposta ao sistema. Este acoplamento, quase sempre, é considerado flexível e sua representação, no modelo, é feita através de mola de torção. Portanto, as divergências existentes entre os diversos modelos residem, basicamente, nas hipóteses que são assumidas para representar a parte principal do modelo, ou seja, os eixos, engrenagens e mancais de sustentação.

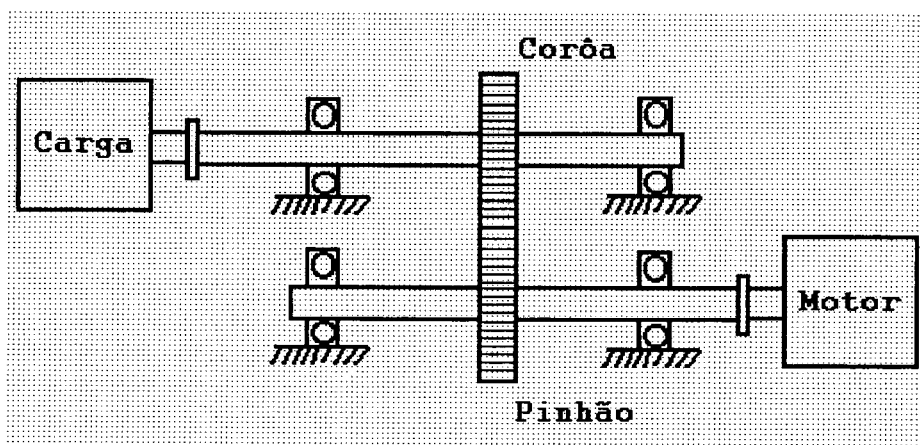


Figura 4.1 – Representação esquemática de um sistema de rotor engrenado.

O desenvolvimento do modelo aqui apresentado tem por base a utilização do método de elementos finitos, a possibilidade de investigação da influência da flexibilidade dos mancais no comportamento dinâmico do sistema e o acoplamento entre as vibrações torcionais e de flexão do conjunto, uma vez que outros pesquisadores chamam nossa atenção para a importância destes efeitos no comportamento dinâmico de um sistema de rotores engrenados. Por outro lado, embora se tenha conhecimento de que o efeito de não linearidade, devido à interrupção momentânea da potência aplicada ou a uma alteração na velocidade de funcionamento (*backlash*), são importantes na predição da resposta dinâmica em engrenagens, o modelo não leva em consideração a separação dos dentes das engrenagens e assume pequenas amplitudes de vibração, o que restringe a abordagem do problema na faixa de um comportamento linear do sistema. Finalmente, o efeito do momento giroscópico, sobre a dinâmica do eixo, é negligenciado e os amortecimentos internos dos eixos são considerados apenas na matriz de amortecimento, de tal modo que as matrizes são simétricas e o problema de autovalor e autovetor é real.

A formulação matemática, dos elementos que compõem o sistema de rotores engrenados de uma caixa de engrenagem de uso veicular, tem por base o uso do *software* comercial ANSYS V. 5.4 de elementos finitos, de tal modo que as características geométricas e estruturais de cada

um desses elementos são representadas por elementos finitos disponíveis na biblioteca de elemento do ANSYS. Assim, os eixos são modelados a partir de um elemento de viga uniaxial (BEAM4), com capacidade de tração, compressão, torção, flexão e seis graus de liberdade em cada nó. As características de inércia das engrenagens e posicionadores são incorporadas ao modelo usando-se um elemento de massa e inércia generalizado (MASS21), que permite a especificação de diferentes massas e inércias rotativas associadas a cada uma das coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$ . A rigidez dos mancais de rolamento e do engrenamento são representados no modelo por um elemento arbitrário, cuja geometria é indefinida mas sua resposta cinemática pode ser especificada por coeficientes de rigidez (MATRIX27), os quais relacionam dois nós, cada um dos quais com seis graus de liberdade.

A equação que governa o movimento vibratório do sistema pode ser dada na forma matricial como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (4.1)$$

onde  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{K}$  são, respectivamente, as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do sistema, e  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{F}$  são definidos, respectivamente, como os vetores de deslocamento e carga aplicada generalizados.

#### 4.3.1 - Representação da Inércia e Rigidez dos Eixos

Os eixos do sistema, que compõem a caixa de engrenagem, são representados no modelo por elementos finitos de viga, para o qual é incorporado o efeito de cisalhamento, uma vez que estes eixos são relativamente robustos. As matrizes de rigidez  $\mathbf{K}^{(j)}$  e de massa  $\mathbf{M}^{(j)}$ , para o  $j$ -ésimo elemento de viga, são dadas por:

$$\mathbf{K}^{(j)} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, dV \quad (4.2)$$

$$\mathbf{M}^{(j)} = \int_V \mathbf{H}^T \rho \mathbf{H} \, dV \quad (4.3)$$

onde  $\rho$  é a massa específica do material;  $\mathbf{H}$  é a matriz de funções de forma;  $\mathbf{B}$  é a matriz de derivadas das funções de forma;  $\mathbf{D}$  é a matriz de elasticidade do elemento.

As Eq. (4.2) e (4.3), para o caso do elemento BEAM4 usado no modelo, assumem a seguinte forma, tendo por base o sistema de coordenadas do elemento [1]:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} SE/L & & & & & & & & & & & \\ 0 & a_z & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & a_y & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & GJ/L & & & & & & & & \\ 0 & 0 & d_y & 0 & e_y & & & & & & & \\ 0 & c_z & 0 & 0 & 0 & e_z & & & & & & \\ -SE/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & SE/L & & & & & \\ 0 & b_z & 0 & 0 & 0 & d_z & 0 & a_z & & & & \\ 0 & 0 & b_y & 0 & c_y & 0 & 0 & 0 & a_y & & & \\ 0 & 0 & 0 & -GJ/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & GJ/L & & \\ 0 & 0 & d_y & 0 & f_y & 0 & 0 & 0 & c_z & 0 & e_y & \\ 0 & c_z & 0 & 0 & 0 & f_z & 0 & d_y & 0 & 0 & 0 & e_z \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_t \begin{bmatrix} 1/3 & & & & & & & & & & & \\ 0 & A_z & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & A_y & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & J/3A & & & & & & & & \\ 0 & 0 & C_y & 0 & E_y & & & & & & & \\ 0 & C_z & 0 & 0 & 0 & E_z & & & & & & \\ 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & & & & & \\ 0 & B_z & 0 & 0 & 0 & D_z & 0 & A_z & & & & \\ 0 & 0 & B_y & 0 & D_y & 0 & 0 & 0 & A_y & & & \\ 0 & 0 & 0 & J/6S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J/3S & & \\ 0 & 0 & D_y & 0 & F_y & 0 & 0 & 0 & C_y & 0 & E_y & \\ 0 & D_z & 0 & 0 & 0 & F_z & 0 & C_z & 0 & 0 & 0 & E_z \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

onde S é a área da seção transversal; E é o módulo de Young; L é o comprimento do elemento; G é o módulo de elasticidade transversal; J é o momento polar de inércia. Os demais parâmetros, usados nas Eq. (4.4) e (4.5), onde o índice i = y, corresponde a j = y e k = z, e o índice i = z, corresponde a j = z e k = y, são dados pelo seguinte conjunto de equações:



$$a_i = \frac{12EI_j}{L^3(1+\phi_k)} ; \quad A_i = \frac{\frac{13}{35} + \frac{7}{10}\phi_k + \frac{1}{3}\phi_k^2 + \frac{6}{5}\left(\frac{r_j}{L}\right)^2}{(1+\phi_k)^2} \quad (4.6)$$

$$b_i = \frac{-12EI_j}{L^3(1+\phi_k)} ; \quad B_i = \frac{\frac{9}{70} + \frac{3}{10}\phi_k + \frac{1}{6}\phi_k^2 - \frac{6}{5}\left(\frac{r_j}{L}\right)^2}{(1+\phi_k)^2} \quad (4.7)$$

$$c_i = \frac{6EI_j}{L^2(1+\phi_k)} ; \quad C_i = \frac{\left[ \frac{11}{210} + \frac{11}{120}\phi_k + \frac{1}{24}\phi_k^2 + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{2}\phi_k\right)\left(\frac{r_j}{L}\right)^2 \right] L}{(1+\phi_k)^2} \quad (4.8)$$

$$d_i = \frac{-6EI_j}{L^2(1+\phi_k)} ; \quad D_i = \frac{\left[ \frac{13}{420} + \frac{3}{40}\phi_k + \frac{1}{24}\phi_k^2 - \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{2}\phi_k\right)\left(\frac{r_j}{L}\right)^2 \right] L}{(1+\phi_k)^2} \quad (4.9)$$

$$e_i = \frac{(4+\phi)EI_j}{L(1+\phi_k)} ; \quad E_i = \frac{\left[ \frac{1}{105} + \frac{1}{60}\phi_k + \frac{1}{120}\phi_k^2 + \left(\frac{2}{15} + \frac{1}{6}\phi_k + \frac{1}{3}\phi_k^2\right)\left(\frac{r_j}{L}\right)^2 \right] L^2}{(1+\phi_k)^2} \quad (4.10)$$

$$f_i = \frac{(2-\phi)EI_j}{L(1+\phi_k)} ; \quad F_i = \frac{-\left[ \frac{1}{140} + \frac{1}{60}\phi_k + \frac{1}{120}\phi_k^2 + \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{6}\phi_k - \frac{1}{6}\phi_k^2\right)\left(\frac{r_j}{L}\right)^2 \right] L^2}{(1+\phi_k)^2} \quad (4.11)$$

$$M_t = (\rho S + m)L(1 - \varepsilon) \quad (4.12)$$

onde  $m$  é a massa adicionada por unidade de comprimento e  $\varepsilon$  a parcela de pré-deformação.

Nas Eq. (4.6) a (4.11), os valores de  $\phi_k$  e  $r_j$  são dados por:

$$\phi_y = \frac{12EI_z}{GF_z^s L^2} ; \quad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{S}} \quad (4.13)$$

$$\phi_z = \frac{12EI_y}{GF_y^s L^2} ; \quad r_z = \sqrt{\frac{I_z}{S}} \quad (4.14)$$

onde  $F_j^s$  é o coeficiente de cisalhamento, que para um eixo maciço de seção circular assume o valor de  $10/9$ , e  $I_j$  o momento de inércia de área normal a direção  $j$ .

#### 4.3.2 - Representação dos Mancais de Elementos Rolantes

Os mancais estão representados no modelo de elementos finitos através dos coeficientes de rigidez para o elemento MATRIX27. Estes coeficientes de rigidez são obtidos a partir da formulação da matriz de rigidez do mancal  $K_m$ , de dimensão  $6 \times 6$ , apresentada no Capítulo 2. Sua obtenção consiste na análise estática do sistema de eixos, de modo a se determinar os deslocamentos de translação e rotação, que compõem o vetor deslocamento  $\mathbf{u} = [\delta_x \ \delta_y \ \delta_z \ \alpha_x \ \alpha_y]^T$  de cada mancal, o qual por sua vez é consequência do carregamento aplicado no sistema, representado pelo vetor de carga média  $\mathbf{F} = [F_x \ F_y \ F_z \ M_x]^T$ , proveniente do contato dos dentes das engrenagens, e responsável pelas reações de apoio, que nada mais são do que as cargas e momentos que atuam nos rolamentos. A implementação dessa matriz no modelo de elementos finitos é feita através de uma matriz de rigidez, de dimensão  $12 \times 12$ , tal que:

$$\mathbf{K}_{M_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_m & -\mathbf{K}_m \\ -\mathbf{K}_m & \mathbf{K}_m \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

#### 4.3.3 – Representação das Engrenagens e Posicionadores

Tendo por base as características de operação de uma caixa de engrenagem de uso veicular, é importante agrupar as engrenagens e posicionadores em dois conjuntos. No primeiro, estão as engrenagens que participam da transmissão de carga e movimento, pois se relacionam com a marcha engrenada, e que influenciam o comportamento do sistema através das suas características de inércia, rigidez e auto excitação. No segundo, estão os posicionadores e as engrenagens que pertencem a uma marcha que não está sendo usada e, portanto, não transmitem movimento e carga, sendo sua ação sobre o sistema apenas devido às suas características de

inércia. Estas engrenagens e posicionadores são representados, no modelo, através do elemento MASS21 e aquelas engrenagens, através da combinação dos elementos MASS21 e MATRIX27.

A matriz de massa do elemento MASS21 é uma matriz diagonal conforme apresentada a seguir [1]:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Im_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Im_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Im_z \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

onde  $m_x = m_y = m_z$  representam a massa da engrenagem e  $Im_i$  ( $i = x, y, z$ ) o momento de inércia de massa.

A matriz de rigidez de dimensão 12x12, do elemento MATRIX27, é obtida tendo por base o modelo desenvolvido no Capítulo 3. Entretanto, como a abordagem feita naquele capítulo leva a uma matriz de rigidez de dimensão 6x6, uma vez que ela somente relaciona os graus de liberdade referentes às coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $\theta_z$  do pinhão e coroa do par engrenado, os coeficientes de rigidez da matriz do elemento MATRIX27, que estão relacionados aos graus de liberdade referentes às coordenadas  $z$ ,  $\theta_x$  e  $\theta_y$ , são feitos nulos.

#### 4.3.4 – Representação da Excitação Devido ao Engrenamento

É um fato bem conhecido que a rigidez de engrenamento varia ao longo do tempo. Entretanto, embora a concepção do modelo de engrenamento, apresentada no Capítulo 3, assuma um valor de rigidez constante, correspondente ao valor médio da rigidez de engrenamento, essa é uma boa aproximação, principalmente quando da análise de um sistema complexo de rotores engrenados, conforme atestado por Ozguven e Houser [71]. Contudo, para incluir o efeito de auto excitação da variação temporal da rigidez de engrenamento, deve-se usar uma excitação de deslocamento, aplicada sobre a mola que representa o engrenamento, correspondente ao erro de transmissão estático. Assim, na análise do efeito do engrenamento sobre o comportamento dinâmico do conjunto eixo-engrenagem-mancal, a excitação é representada por um vetor de carregamento  $\mathbf{F} = [F_x \ F_y \ M_z]^T$ , aplicado sobre os nós que representam o posicionamento das

engrenagens sobre o eixo, conforme o esboço apresentado na Fig. 4.2, de tal modo que suas componentes são dadas por:

$$F_i^x = F_m \cos \phi_t \quad (4.17)$$

$$F_i^y = F_m \sin \phi_t \quad (4.18)$$

$$M_i^z = F_m R_{bi} \quad (4.19)$$

onde o índice  $i = p, c$ , identifica a engrenagem do par, isto é pinhão (p) ou coroa (c);  $\phi_t$  é o ângulo de pressão transversal;  $R_{bi}$  é o raio do círculo de base da engrenagem  $i$ ;  $F_m$  é a força sobre a mola, que representa a rigidez do engrenamento, dada por:

$$F_m = k_g \varepsilon(t) \quad (4.20)$$

onde  $\varepsilon(t)$  é o erro de transmissão estático para o par de engrenagens que transmite a carga e movimento.

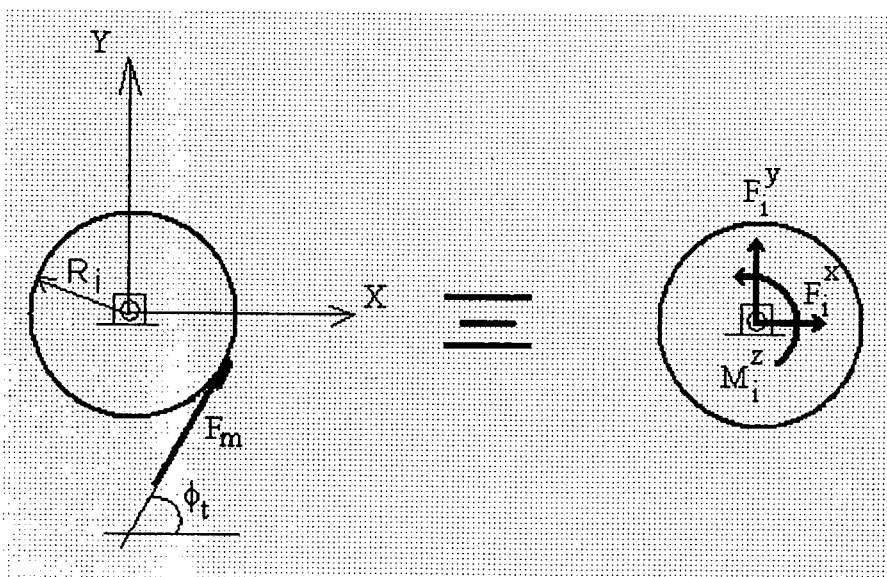


Figura 4.2 – Esboço referente a auto excitação do engrenamento.

#### 4.4 - APLICAÇÃO AO SISTEMA DE EIXOS DA CAIXA DE ENGRENAGEM

Uma análise do sistema de eixos, da caixa de engrenagem de uso veicular, foi implementada para condições de operação distintas. Estas condições tiveram por base a operação do sistema em 1ª e 3ª marchas, para carregamentos correspondentes a 50 % e 100 % do torque máximo de projeto da caixa de engrenagem e, ainda, dentes de engrenagem com perfil padrão e perfil modificado. A Fig. 4.3 apresenta o modelo de elementos finitos para o sistema de rotores engrenados da caixa de engrenagem de uso veicular, nas configurações referentes à primeira (Fig. 4.3.b) e à terceira (Fig. 4.3.a) marchas engrenadas, onde **E**, **P** e **M** representam, respectivamente, as engrenagens, posicionadores e mancais.

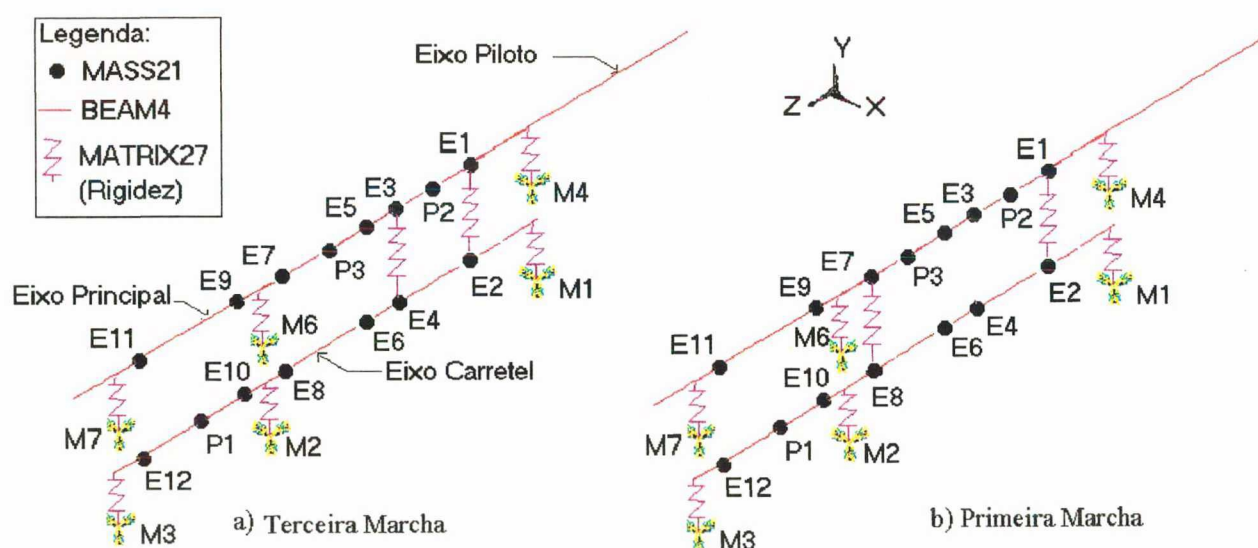


Figura 4.3 – Modelos de elementos finitos do sistema de eixos engrenados.

A diferença básica existente entre as duas configurações do modelo, apresentadas na Fig. 4.3, está na ligação entre os eixos carretel e principal, que é feita através do elemento MATRIX27, para o par de engrenagens E3 – E4, na condição de 3ª marcha, e para o par de engrenagens E7 – E8, na condição de 1ª marcha.

A análise dos modelos da Fig. 4.3 tem como objetivo o cálculo de autovalores, autovetores (Análise Modal), resposta harmônica (Análise Forçada) e a predição do vetor de carga que atua sobre o alojamento da caixa de engrenagem, como consequência da auto excitação imposta pelo engrenamento.

#### 4.4.1 – Análise Modal

A representação de uma estrutura contínua por elementos finitos leva a um sistema de  $n$  equações diferenciais de segunda ordem, que geralmente apresentam acoplamento dinâmico e estático, através dos termos de massa e rigidez respectivamente, cuja representação é dada pela Eq. 4.1. Na análise modal, tendo por base a determinação dos modos reais, a matriz de amortecimento e o vetor de forças são feitos nulos e a Eq. (4.1) passa a ser escrita como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (4.21)$$

onde as matrizes de massa e rigidez são montadas tendo por base as matrizes dos elementos individuais.

Assumindo que a resposta de deslocamento é harmônica,  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(\omega)e^{i\omega t}$ , então o problema de autovalor estrutural pode ser escrito na forma:

$$\mathbf{K}\Psi_j = \lambda_j \mathbf{M}\Psi_j \quad \text{com } j = 1, \dots, n \quad (4.22)$$

onde  $\lambda_j = \omega_j^2$  é o  $j$ -ésimo autovalor e  $\Psi_j$  é o  $j$ -ésimo autovetor, que podem ser, respectivamente, interpretados como o quadrado da frequência natural de vibração e sua forma modal correspondente.

As informações necessárias para a especificação das constantes reais relativas aos elementos de viga (BEAM4) e dos elementos arbitrários (MATRIX27), usados para representar a rigidez dos mancais e do engrenamento, são encontradas nos Capítulos 2 e 3. As tabelas 4.1 e 4.2 apresentam as características de inércia das engrenagens e posicionadores, que são especificadas como constantes reais dos elementos MASS21. Aqui, é importante destacar que estas características foram obtidas, tendo por base as propriedades dos materiais e a geometria das engrenagens e posicionadores, através do cálculo computacional realizado em um programa desenvolvido no software MATLAB V. 5.1, fazendo-se a aproximação da geometria real por um conjunto de formas geométricas simples, cujos valores de massa e momento de inércia de massa podem ser obtidos por expressões analíticas conhecidas.

Para os pares de engrenagem que não transmitem movimento nem carga, ou seja, aqueles em que uma das engrenagens gira livremente sem transmitir movimento ao eixo que a sustenta, a



Tabela 4.1 – Constantes reais dos elementos MASS21 do modelo da Fig. 4.3.(b).

ELEMENTOS DE MASSA ESTRUTURAL  
(MASSA 21: 3D COM INÉRCIA ROTATIVA)

CONDIÇÃO DE PRIMEIRA MARCHA

EIXO PILOTO:

| ELEMENTO     | CONST. REAL | MASSX (kg) | MASSY (kg) | MASSZ (kg) | Ixx (kg.m2) | Iyy (kg.m2) | Izz (kg.m2) |
|--------------|-------------|------------|------------|------------|-------------|-------------|-------------|
| 1:NÓ 1 (E-1) | R,1         | 1.0604     | 1.0604     | 1.0604     | 9.8949E-04  | 9.8949E-04  | 1.2912E-03  |

EIXO PRINCIPAL:

| ELEMENTO       | CONST. REAL | MASSX (kg) | MASSY (kg) | MASSZ (kg) | Ixx (kg.m2) | Iyy (kg.m2) | Izz (kg.m2) |
|----------------|-------------|------------|------------|------------|-------------|-------------|-------------|
| 2:NÓ 55 (P-2)  | R,2         | 1.1871     | 1.1871     | 1.1871     | 1.3141E-03  | 1.3141E-03  | 2.5155E-03  |
| 3:NÓ 52 (E-3)  | R,3         | 1.2558     | 1.2558     | 1.2558     | 1.1164E-03  | 1.1164E-03  | 0.0000E+00  |
| 4:NÓ 49 (E-5)  | R,4         | 1.6507     | 1.6507     | 1.6507     | 1.6791E-03  | 1.6791E-03  | 0.0000E+00  |
| 5:NÓ 45 (P-3)  | R,5         | 1.1871     | 1.1871     | 1.1871     | 1.3141E-03  | 1.3141E-03  | 2.5155E-03  |
| 6:NÓ 42 (E-7)  | R,6         | 2.6915     | 2.6915     | 2.6915     | 2.9607E-03  | 2.9607E-03  | 4.9267E-03  |
| 7:NÓ 37 (E-9)  | R,7         | 0.3446     | 0.3446     | 0.3446     | 1.2326E-04  | 1.2326E-04  | 9.6736E-04  |
| 8:NÓ 31 (E-11) | R,8         | 1.1374     | 1.1374     | 1.1374     | 1.0738E-03  | 1.0738E-03  | 7.1647E-03  |

EIXO CARRETEL:

| ELEMENTO      | CONST. REAL | MASSX (kg) | MASSY (kg) | MASSZ (kg) | Ixx (kg.m2) | Iyy (kg.m2) | Izz (kg.m2) |
|---------------|-------------|------------|------------|------------|-------------|-------------|-------------|
| 9:NÓ 95 E-2   | R,9         | 1.3006     | 1.3006     | 1.3006     | 9.7783E-04  | 9.7783E-04  | 1.7917E-03  |
| 10:NÓ 88 E-4  | R,10        | 0.7550     | 0.7550     | 0.7550     | 4.2592E-04  | 4.2592E-04  | 2.4152E-03  |
| 11:NÓ 85 E-6  | R,11        | 0.4080     | 0.4080     | 0.4080     | 1.6969E-04  | 1.6969E-04  | 1.3312E-03  |
| 12:NÓ 77 E-8  | R,12        | 0.0196     | 0.0196     | 0.0196     | 5.7138E-06  | 5.7138E-06  | 8.0842E-06  |
| 13:NÓ 70 E-10 | R,13        | 1.9793     | 1.9793     | 1.9793     | 1.8295E-03  | 1.8295E-03  | 0.0000E+00  |
| 14:NÓ 66 P-1  | R,14        | 0.8507     | 0.8507     | 0.8507     | 6.0464E-04  | 6.0464E-04  | 1.1447E-03  |
| 15:NÓ 63 E-12 | R,15        | 0.5175     | 0.5175     | 0.5175     | 2.9582E-04  | 2.9582E-04  | 0.0000E+00  |

Tabela 4.2 – Constantes reais dos elementos MASS21 do modelo da Fig. 4.3.(a).

ELEMENTOS DE MASSA ESTRUTURAL  
(MASSA 21: 3D COM INÉRCIA ROTATIVA)

CONDIÇÃO DE TERCEIRA MARCHA

EIXO PILOTO:

| ELEMENTO     | CONST. REAL | MASSX (kg) | MASSY (kg) | MASSZ (kg) | Ixx (kg.m2) | Iyy (kg.m2) | Izz (kg.m2) |
|--------------|-------------|------------|------------|------------|-------------|-------------|-------------|
| 1:NÓ 1 (E-1) | R,1         | 1.0604     | 1.0604     | 1.0604     | 9.8949E-04  | 9.8949E-04  | 1.2912E-03  |

EIXO PRINCIPAL:

| ELEMENTO       | CONST. REAL | MASSX (kg) | MASSY (kg) | MASSZ (kg) | Ixx (kg.m2) | Iyy (kg.m2) | Izz (kg.m2) |
|----------------|-------------|------------|------------|------------|-------------|-------------|-------------|
| 2:NÓ 55 (P-2)  | R,2         | 1.1871     | 1.1871     | 1.1871     | 1.3141E-03  | 1.3141E-03  | 2.5155E-03  |
| 3:NÓ 52 (E-3)  | R,3         | 1.2558     | 1.2558     | 1.2558     | 1.1164E-03  | 1.1164E-03  | 1.7572E-03  |
| 4:NÓ 49 (E-5)  | R,4         | 1.6507     | 1.6507     | 1.6507     | 1.6791E-03  | 1.6791E-03  | 0.0000E+00  |
| 5:NÓ 45 (P-3)  | R,5         | 1.1871     | 1.1871     | 1.1871     | 1.3141E-03  | 1.3141E-03  | 2.5155E-03  |
| 6:NÓ 42 (E-7)  | R,6         | 2.6915     | 2.6915     | 2.6915     | 2.9607E-03  | 2.9607E-03  | 0.0000E+00  |
| 7:NÓ 37 (E-9)  | R,7         | 0.3446     | 0.3446     | 0.3446     | 1.2326E-04  | 1.2326E-04  | 9.6736E-04  |
| 8:NÓ 31 (E-11) | R,8         | 1.1374     | 1.1374     | 1.1374     | 1.0738E-03  | 1.0738E-03  | 7.1647E-03  |

EIXO CARRETEL:

| ELEMENTO      | CONST. REAL | MASSX (kg) | MASSY (kg) | MASSZ (kg) | Ixx (kg.m2) | Iyy (kg.m2) | Izz (kg.m2) |
|---------------|-------------|------------|------------|------------|-------------|-------------|-------------|
| 9:NÓ 95 E-2   | R,9         | 1.3006     | 1.3006     | 1.3006     | 9.7783E-04  | 9.7783E-04  | 1.7917E-03  |
| 10:NÓ 88 E-4  | R,10        | 0.7550     | 0.7550     | 0.7550     | 4.2592E-04  | 4.2592E-04  | 2.4152E-03  |
| 11:NÓ 85 E-6  | R,11        | 0.4080     | 0.4080     | 0.4080     | 1.6969E-04  | 1.6969E-04  | 1.3312E-03  |
| 12:NÓ 77 E-8  | R,12        | 0.0196     | 0.0196     | 0.0196     | 5.7138E-06  | 5.7138E-06  | 8.0842E-06  |
| 13:NÓ 70 E-10 | R,13        | 1.9793     | 1.9793     | 1.9793     | 1.8295E-03  | 1.8295E-03  | 0.0000E+00  |
| 14:NÓ 66 P-1  | R,14        | 0.8507     | 0.8507     | 0.8507     | 6.0464E-04  | 6.0464E-04  | 1.1447E-03  |
| 15:NÓ 63 E-12 | R,15        | 0.5175     | 0.5175     | 0.5175     | 2.9582E-04  | 2.9582E-04  | 0.0000E+00  |



inércia rotativa do par de engrenagem foi toda ela referenciada a um único eixo usando-se a seguinte relação:

$$I_{zz}^{(1)}(eq) = I_{zz}^{(1)} + I_{zz}^{(2)} \cdot \left( \frac{Z_1}{Z_2} \right)^2 \quad (4.23)$$

onde  $I_{zz}^{(1)}(eq)$  é a inércia rotativa equivalente ao par de engrenagem referenciada ao eixo (1);  $I_{zz}^{(k)}$  e  $Z_k$  são, respectivamente, a inércia rotativa e o número de dentes da engrenagem montada sobre o eixo  $k$ , com  $k = 1, 2$ .

A análise modal, desenvolvida no ANSYS V. 5.4, tendo por base o algoritmo de extração modal de Block Lanczos, forneceu os valores de frequência natural apresentados nas tabelas 4.3 e 4.4, para os quarenta primeiros modos de vibração, referentes à condição de 1ª e 3ª marchas respectivamente. Nestas tabelas, os valores estão tabulados segundo condições distintas de carga e de perfil do dente das engrenagens e, uma comparação entre eles, permite verificar que, embora haja modificações nos valores das frequências naturais, as alterações significativas ocorrem quando da variação do carregamento, considerado um mesmo perfil de dente, conforme mostrado pelos valores absolutos da diferença relativa nas Fig. 4.4(a) e 4.5(a), enquanto que mantendo-se a carga e variando o perfil de dente, essa modificação é pouca expressiva, conforme mostrado nas Fig. 4.4(b) e 4.5(b). Assim, os valores das frequências naturais são mais influenciados pelas matrizes de rigidez que representam os mancais do que pelas matrizes de rigidez que representam os engrenamentos.

As Fig. 4.4 e 4.5 mostram que a tendência, comentada no parágrafo anterior, foi a mesma para as duas condições de marcha engrenada, entretanto, as modificações significativas nos valores das frequências naturais ocorreram em um conjunto diferente de modos de vibração, ou seja, nos modos 1º, 2º, 4º, 5º, 10º, 11º, 12º, 17º e 21º, para a condição de 1ª marcha, e nos modos 1º, 2º, 4º, 7º, 9º, 10º, 12º, 15º e 16º, para a condição de 3ª marcha. Esta composição diferente, do conjunto de modos que apresentam modificações significativas nos valores das frequências naturais, pode ter sua origem na diferença básica existente entre os dois modelos, isto é, no posicionamento do elemento MATRIX27, que representa o par de engrenagens relativo à condição de marcha engrenada, e nos valores dos coeficientes de rigidez que representam os mancais e engrenamentos, o que diferencia quantitativamente a rigidez e sua distribuição espacial para os dois modelos.

Tabela 4.3 – Frequências naturais para a condição de 1ª marcha.

| Modo | PERFIL MODIFICADO |            | PERFIL PADRÃO |            |
|------|-------------------|------------|---------------|------------|
|      | 50 % de T         | 100 % de T | 50 % de T     | 100 % de T |
| 1    | 71,35             | 91,50      | 73,77         | 91,45      |
| 2    | 102,12            | 102,31     | 100,19        | 106,98     |
| 3    | 526,34            | 530,85     | 525,80        | 531,05     |
| 4    | 582,76            | 608,05     | 582,64        | 608,07     |
| 5    | 723,62            | 772,54     | 724,30        | 772,62     |
| 6    | 820,76            | 832,25     | 820,76        | 832,60     |
| 7    | 847,84            | 861,67     | 848,69        | 861,83     |
| 8    | 893,80            | 898,12     | 893,72        | 898,19     |
| 9    | 972,85            | 977,06     | 976,25        | 978,31     |
| 10   | 1024,10           | 1088,30    | 1024,80       | 1088,30    |
| 11   | 1061,50           | 1184,80    | 1061,50       | 1184,70    |
| 12   | 1159,20           | 1225,30    | 1159,20       | 1225,30    |
| 13   | 1212,60           | 1236,80    | 1212,70       | 1236,90    |
| 14   | 1318,10           | 1321,30    | 1317,90       | 1321,10    |
| 15   | 1497,00           | 1505,80    | 1500,10       | 1506,40    |
| 16   | 1519,00           | 1527,50    | 1518,70       | 1527,40    |
| 17   | 1634,40           | 1850,20    | 1634,40       | 1850,30    |
| 18   | 1876,00           | 1887,40    | 1881,50       | 1888,90    |
| 19   | 1961,60           | 1970,90    | 1962,80       | 1971,60    |
| 20   | 1975,80           | 1991,40    | 1979,20       | 1992,00    |
| 21   | 2031,50           | 2219,20    | 2031,60       | 2219,40    |
| 22   | 2298,70           | 2327,50    | 2306,80       | 2328,90    |
| 23   | 2571,70           | 2639,40    | 2571,70       | 2639,40    |
| 24   | 2649,50           | 2671,50    | 2649,50       | 2671,50    |
| 25   | 2681,90           | 2701,80    | 2682,70       | 2701,90    |
| 26   | 2893,00           | 2988,30    | 2893,00       | 2988,30    |
| 27   | 3000,80           | 3033,10    | 3001,10       | 3033,20    |
| 28   | 3117,80           | 3140,00    | 3130,50       | 3143,50    |
| 29   | 3458,90           | 3466,00    | 3460,10       | 3466,10    |
| 30   | 3486,20           | 3550,20    | 3487,30       | 3550,60    |



Tabela 4.4 – Frequências naturais para a condição de 3ª marcha.

| Modo | PERFIL MODIFICADO |            | PERFIL PADRÃO |            |
|------|-------------------|------------|---------------|------------|
|      | 50 % de T         | 100 % de T | 50 % de T     | 100 % de T |
| 1    | 88,43             | 74,12      | 87,97         | 74,79      |
| 2    | 97,93             | 90,78      | 98,91         | 93,67      |
| 3    | 465,99            | 460,19     | 455,26        | 464,24     |
| 4    | 526,29            | 548,46     | 526,30        | 548,47     |
| 5    | 732,65            | 746,34     | 732,83        | 746,07     |
| 6    | 797,88            | 801,19     | 796,97        | 802,28     |
| 7    | 832,97            | 867,39     | 832,98        | 867,40     |
| 8    | 868,48            | 882,60     | 868,46        | 882,74     |
| 9    | 979,45            | 1038,40    | 979,43        | 1038,50    |
| 10   | 1021,40           | 1085,40    | 1022,00       | 1088,30    |
| 11   | 1080,90           | 1115,40    | 1086,40       | 1115,40    |
| 12   | 1148,40           | 1197,40    | 1148,40       | 1197,50    |
| 13   | 1183,90           | 1208,50    | 1184,00       | 1208,50    |
| 14   | 1334,00           | 1338,50    | 1336,60       | 1340,80    |
| 15   | 1477,60           | 1530,20    | 1477,90       | 1530,10    |
| 16   | 1532,70           | 1613,50    | 1532,50       | 1615,30    |
| 17   | 1612,30           | 1661,20    | 1617,60       | 1661,40    |
| 18   | 1928,70           | 1938,50    | 1928,70       | 1938,50    |
| 19   | 1984,30           | 2013,00    | 1984,40       | 2013,10    |
| 20   | 2120,60           | 2176,80    | 2120,80       | 2176,80    |
| 21   | 2514,30           | 2525,30    | 2521,00       | 2526,80    |
| 22   | 2598,70           | 2652,70    | 2598,70       | 2652,80    |
| 23   | 2647,90           | 2661,80    | 2649,00       | 2661,80    |
| 24   | 2655,10           | 2674,90    | 2655,10       | 2674,90    |
| 25   | 2741,00           | 2772,40    | 2741,80       | 2772,50    |
| 26   | 2878,90           | 2968,30    | 2878,90       | 2968,30    |
| 27   | 2965,70           | 2991,20    | 2967,80       | 2991,80    |
| 28   | 3155,20           | 3213,10    | 3215,00       | 3227,90    |
| 29   | 3485,50           | 3487,40    | 3487,30       | 3488,00    |
| 30   | 3691,50           | 3729,00    | 3693,90       | 3729,50    |

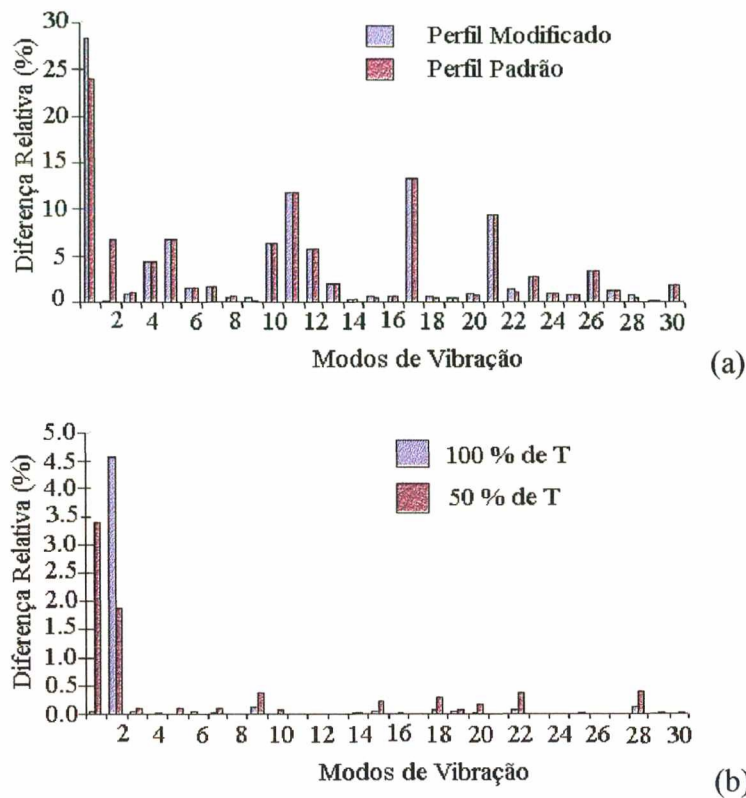


Figura 4.4 – Valores absolutos da diferença relativa para condição de 1ª marcha.

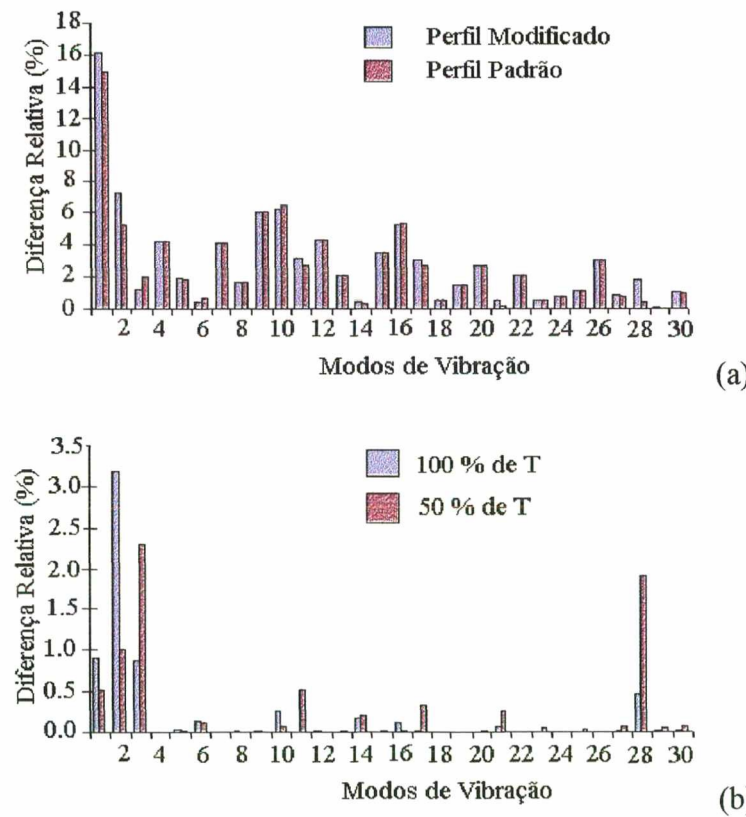


Figura 4.5 – Valores absoluto da diferença relativa para condição de 3ª marcha.

As formas modais relacionadas com as frequências listadas nas tabelas 4.3 e 4.4 são combinações dos movimentos transversal, torcional e axial dos eixos em maior ou menor escala, dependendo do modo considerado. As Fig. 4.6 e 4.7 mostram, respectivamente, um conjunto de formas modais relativas a condição de primeira e terceira marcha, para valores de torque correspondentes a 50 % e 100% do torque máximo de projeto da caixa de engrenagem e perfil modificado do dente. Como pode ser observado, as diferenças existentes entre as formas modais, relativas a mesma ordem do modo e cargas distintas, são pequenas.

#### 4.4.2 – Análise Forçada

A análise de vibrações forçadas, a ser aqui utilizada, é feita através da análise harmônica, que é uma técnica usada para determinar a resposta forçada de uma estrutura para cargas que apresentam uma variação temporal harmônica. Esta técnica de análise permite que sejam calculadas apenas as vibrações forçadas em regime permanente, não sendo possível a determinação das características da vibração transiente, ou seja, aquela que ocorre no início da excitação.

Embora estejam disponíveis três métodos de solução, que podem ser empregados em uma análise harmônica, o método escolhido foi o da superposição modal. Neste método, as frequências naturais e formas modais, obtidas na análise modal, são usadas com o objetivo de caracterizar a resposta dinâmica da estrutura. Assim, definindo um conjunto de coordenadas modais  $y_i$ , tal que:

$$\mathbf{q} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\Psi}_i y_i \quad (4.24)$$

onde  $\boldsymbol{\Psi}_i$  é a forma modal, correspondente ao  $i$ -ésimo modo de vibração, e  $n$  o número de modos usados, é possível, a partir da substituição da Eq. (4.24) na Eq. (4.1), e usando-se a condição de ortogonalidade dos modos de vibração ( $\boldsymbol{\Psi}_j^T \cdot \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\Psi}_i = 0$  e  $\boldsymbol{\Psi}_j^T \cdot \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\Psi}_i = 0$  para  $i \neq j$ ), bem como a hipótese de amortecimento de Rayleigh ( $\boldsymbol{\Psi}_j^T \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\Psi}_i = 0$  para  $i \neq j$ ), obter-se o seguinte conjunto de  $n$  equações desacopladas:

$$\ddot{y}_j + 2\zeta_j \omega_j \dot{y}_j + \omega_j^2 y_j = f_j \quad \text{com} \quad f_j = \boldsymbol{\Psi}_j^T \mathbf{F} \quad (4.25)$$

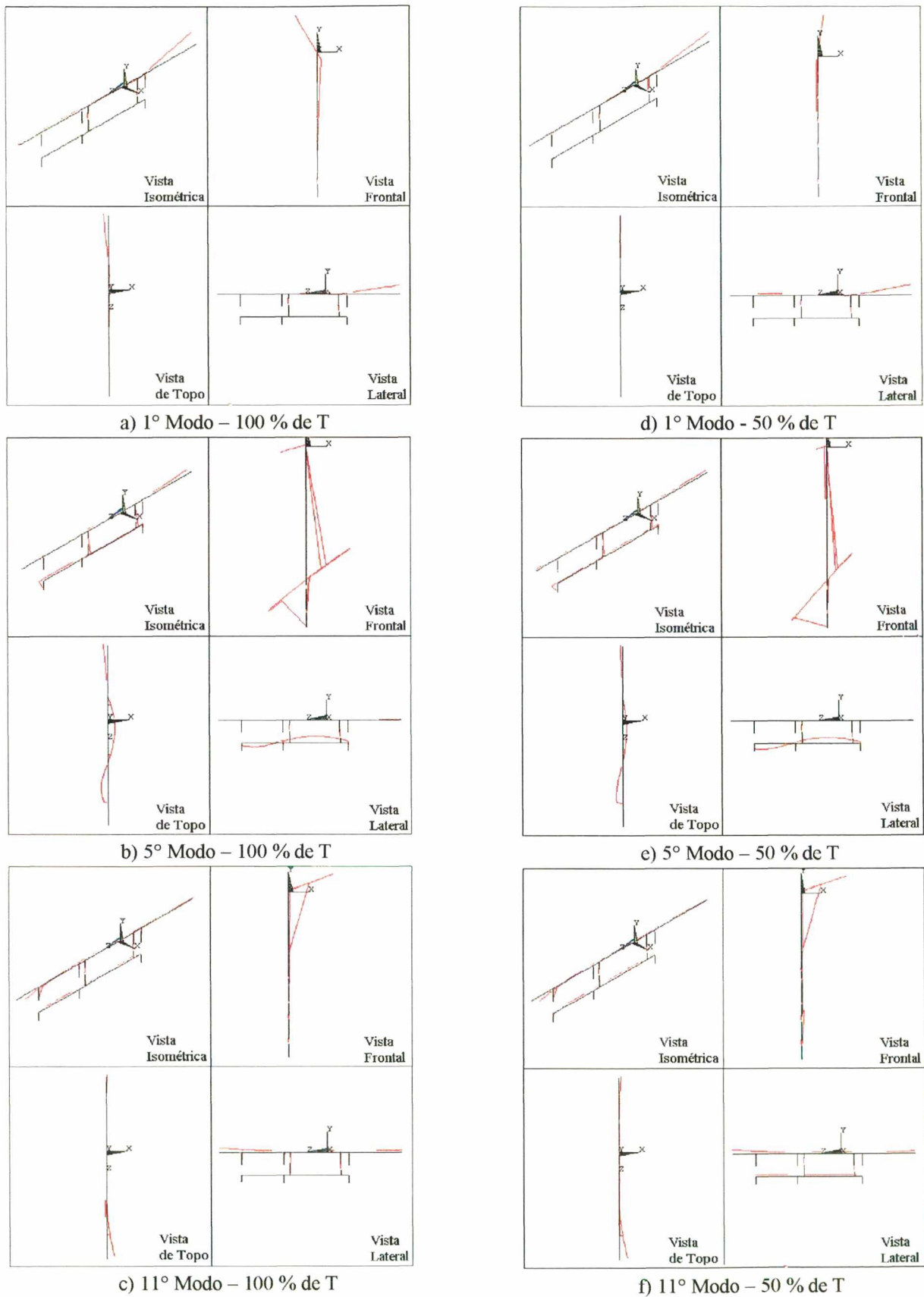


Figura 4.6 – Formas modais relativas a condição de 1ª marcha.



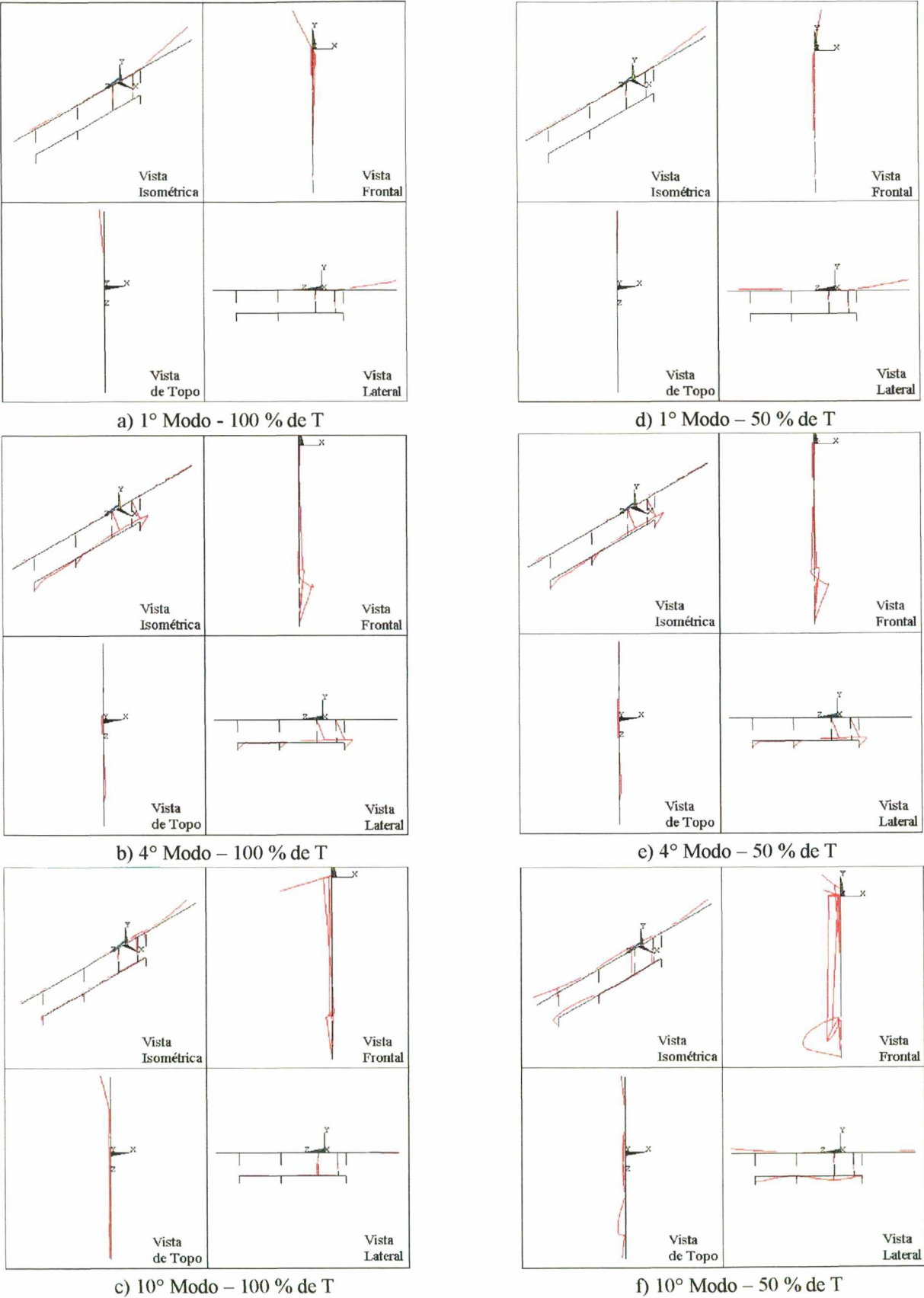


Figura 4.7 - Formas modais relativas a condição de 3ª marcha.

A vantagem da obtenção de um sistema de equações desacopladas é que toda a álgebra computacional de matriz já foi feita na fase de análise modal e, nesta etapa de solução, o processo de cálculo é muito rápido. Assumindo excitação harmônica,  $f_j$  tem a seguinte forma:

$$f_j = f_{jc} e^{i\Omega t} \quad (4.26)$$

onde  $f_{jc}$  é a amplitude complexa de  $f_j$  e  $\Omega$  a frequência de excitação. Assim, para que a Eq. (4.25) seja verdadeira para qualquer tempo  $t$ ,  $y_j$  deve ter uma forma similar a  $f_j$ , ou seja:

$$y_j = y_{jc} e^{i\Omega t} \quad (4.27)$$

onde  $y_{jc}$  é a amplitude complexa da coordenada modal para o modo  $j$  dada por:

$$y_{jc} = \frac{f_{jc}}{(\omega_j^2 - \Omega^2) + i(2\omega_j \Omega \xi_j)} \quad (4.28)$$

A contribuição de cada modo para a vibração forçada é dada por:

$$\mathbf{Bm}_j = \Psi_j y_{jc} \quad (4.29)$$

e os deslocamentos complexos, referentes a vibração forçada, são obtidos da Eq. (4.24) como:

$$\mathbf{q}_c = \sum_{j=1}^n \mathbf{Bm}_j \quad (4.30)$$

A metodologia, aqui apresentada, foi usada para analisar os dois modelos mostrados na Fig. 4.3, tendo por base um fator de amortecimento modal constante de 0,1, valor este que tem sido usado por outros pesquisadores, e os cinco primeiros harmônicos das frequências de engrenamento, relativas a cada conjunto de par de engrenagens que caracterizam as condições de 1ª e 3ª marchas, bem como cinco condições distintas de rotação de entrada. A tabela 4.5



apresenta os valores das frequências de excitação para cada uma das condições de operação da caixa de engrenagem.

Tabela 4.5 – Frequências de excitação em Hz

| ROTAÇÃO<br>(rpm) | HARM. | ENGRENAGENS |           |           |
|------------------|-------|-------------|-----------|-----------|
|                  |       | Neutras     | 1ª Marcha | 3ª Marcha |
| 1800             | 1°    | 780,00      | 316,20    | 611,40    |
|                  | 2°    | 1560,00     | 632,40    | 1222,80   |
|                  | 3°    | 2340,00     | 948,60    | 1834,20   |
|                  | 4°    | 3120,00     | 1264,80   | 2445,60   |
|                  | 5°    | 3900,00     | 1581,00   | 3057,00   |
| 2100             | 1°    | 910,00      | 368,90    | 713,30    |
|                  | 2°    | 1820,00     | 737,80    | 1426,60   |
|                  | 3°    | 2730,00     | 1106,70   | 2139,90   |
|                  | 4°    | 3640,00     | 1475,60   | 2853,20   |
|                  | 5°    | 4550,00     | 1844,50   | 3566,50   |
| 2400             | 1°    | 1040,00     | 421,60    | 815,20    |
|                  | 2°    | 2080,00     | 843,20    | 1630,40   |
|                  | 3°    | 3120,00     | 1264,80   | 2445,60   |
|                  | 4°    | 4160,00     | 1686,40   | 3260,80   |
|                  | 5°    | 5200,00     | 2108,00   | 4076,00   |
| 2700             | 1°    | 1170,00     | 474,30    | 917,10    |
|                  | 2°    | 2340,00     | 948,60    | 1834,20   |
|                  | 3°    | 3510,00     | 1422,90   | 2751,30   |
|                  | 4°    | 4680,00     | 1897,20   | 3668,40   |
|                  | 5°    | 5850,00     | 2371,50   | 4585,50   |
| 3000             | 1°    | 1300,00     | 527,00    | 1019,00   |
|                  | 2°    | 2600,00     | 1054,00   | 2038,00   |
|                  | 3°    | 3900,00     | 1581,00   | 3057,00   |
|                  | 4°    | 5200,00     | 2108,00   | 4076,00   |
|                  | 5°    | 6500,00     | 2635,00   | 5095,00   |

A Fig. 4.8 mostra as configurações deformadas para a resposta forçada relativas aos 1°, 2°, 3°, 4° e 5° harmônicos da 1ª marcha, para a rotação do eixo piloto de 3000 rpm e perfil do dente das engrenagens modificado, bem como a forma modal correspondente ao 3º modo de vibração, sendo que todas as formas deformadas dizem respeito a condição de carregamento que corresponde a 50 % do torque máximo. A forma modal relativa ao 3º modo de vibração é incluída na Fig. 4.8, para mostrar o fato de que, estando a frequência de excitação próxima do valor da frequência natural e o carregamento atuando de modo propício a excitar o modo, a forma deformada da resposta forçada apresenta uma boa concordância com a forma modal e, assim sendo, a contribuição deste modo para a resposta do sistema é bem mais significativa naquela frequência.

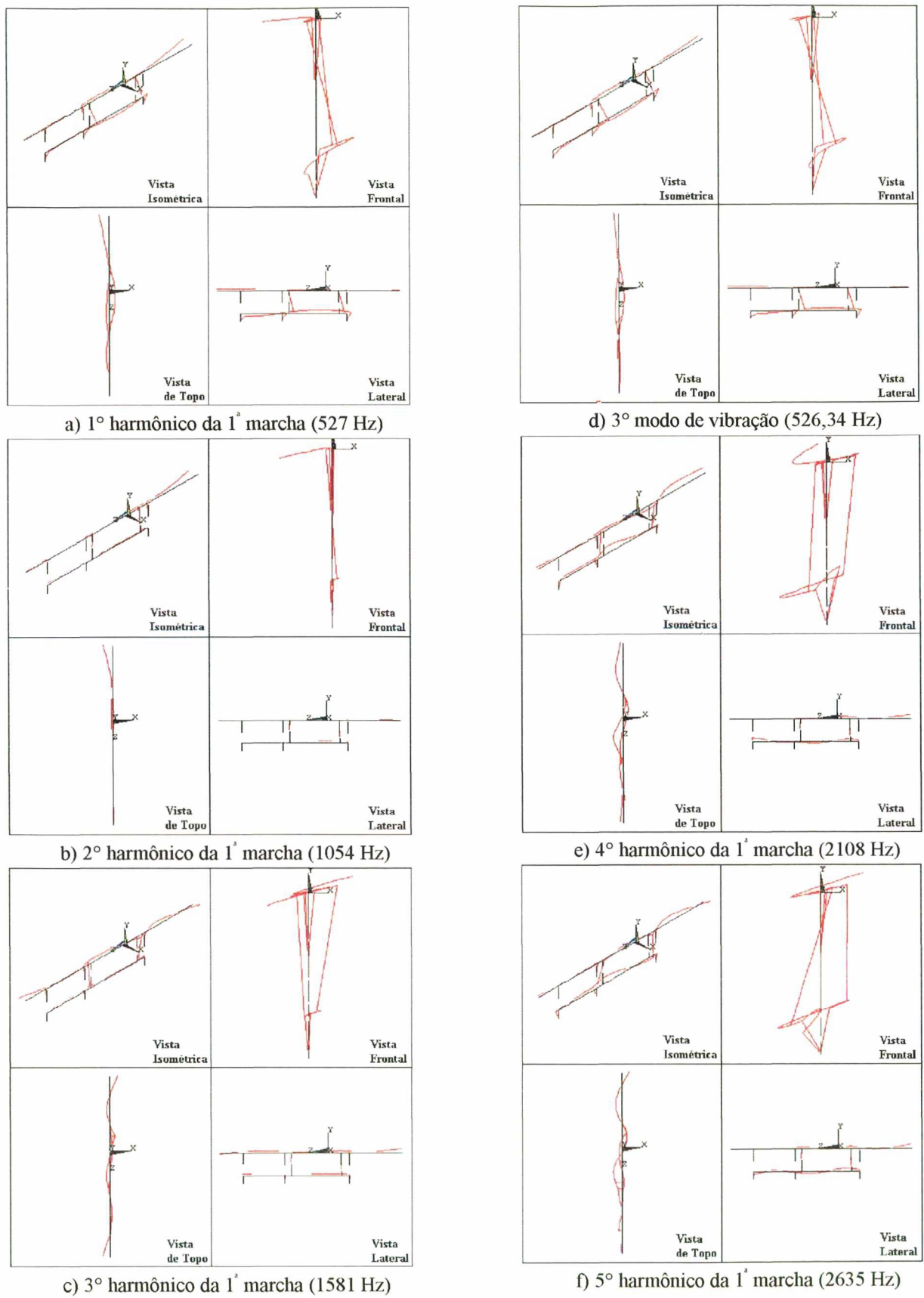


Figura 4.8 – Formas deformadas para carga de 50 % de T em 1ª marcha.

Os modelos apresentados nas Fig. 4.3, juntamente com a técnica de análise harmônica, permitem, ainda, a determinação das reações de apoio, que são uma estimativa do carregamento que será transmitido para o suporte dos mancais, como consequência da auto excitação imposta pelo engrenamento. A Eq. 4.31, apresentada abaixo, é a expressão geral usada para determinar o vetor de carga, que corresponde as reações de apoio, segundo um sistema de referência tridimensional, tendo por base as matrizes de massa ( $\mathbf{M}^e$ ), rigidez ( $\mathbf{K}^e$ ) e amortecimento ( $\mathbf{C}^e$ ), bem como os vetores de deslocamento ( $\mathbf{u}^e$ ), velocidade ( $\dot{\mathbf{u}}^e$ ) e aceleração ( $\ddot{\mathbf{u}}^e$ ) dos elementos ligados ao nó que representa o ponto de apoio [1]:

$$\mathbf{f}^r = \sum_{m=1}^N (\mathbf{K}_m^e \mathbf{u}_m^e + \mathbf{C}_m^e \dot{\mathbf{u}}_m^e - \mathbf{M}_m^e \ddot{\mathbf{u}}_m^e) - \mathbf{f}^{nd} \quad (4.31)$$

onde  $\mathbf{f}^r$  é o vetor de carga, que corresponde às reações,  $N$  o número de elementos e  $\mathbf{f}^{nd}$  o vetor de carga nodal aplicada.

As Fig. 4.9 a 4.13 apresentam os valores de amplitude das forças e momentos transmitidos pelos mancais, para condição de 3ª marcha, engrenagens com perfil de dente padrão e modificado, bem como para duas situações de carregamento correspondentes a 50 % e 100 % do torque máximo de projeto da caixa de engrenagem e valores distintos de rotação do eixo piloto. É possível constatar, com base na observação destas figuras, que os mancais mais carregados são os identificados no modelo de elementos finitos por  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_4$  e  $M_6$ , sendo que os dois primeiros suportam o eixo carretel e os dois últimos os eixos piloto e principal. Este fato condiz com uma realidade que se expressa através da proximidade do ponto de aplicação das excitações, uma vez que os pares de engrenagens de terceira marcha e neutras são posicionados sobre os eixos nos vãos formados por estes mancais. Por outro lado, a diferença no perfil do dente das engrenagens mostra claramente que o perfil modificado minimiza significativamente o efeito, sobre os mancais, da auto excitação do engrenamento, para a situação de carga alta (100 % de  $T$ ). Entretanto, para uma situação de carga mais leve, como é o caso do carregamento correspondente a 50 % de  $T$ , esta tendência não se manifesta de forma expressiva e, para alguns harmônicos da frequência de engrenamento, passa a haver uma inversão, ou seja, os valores de reação nos mancais passam a ser mais altos para a condição em que as engrenagens apresentam perfil de dente modificado.



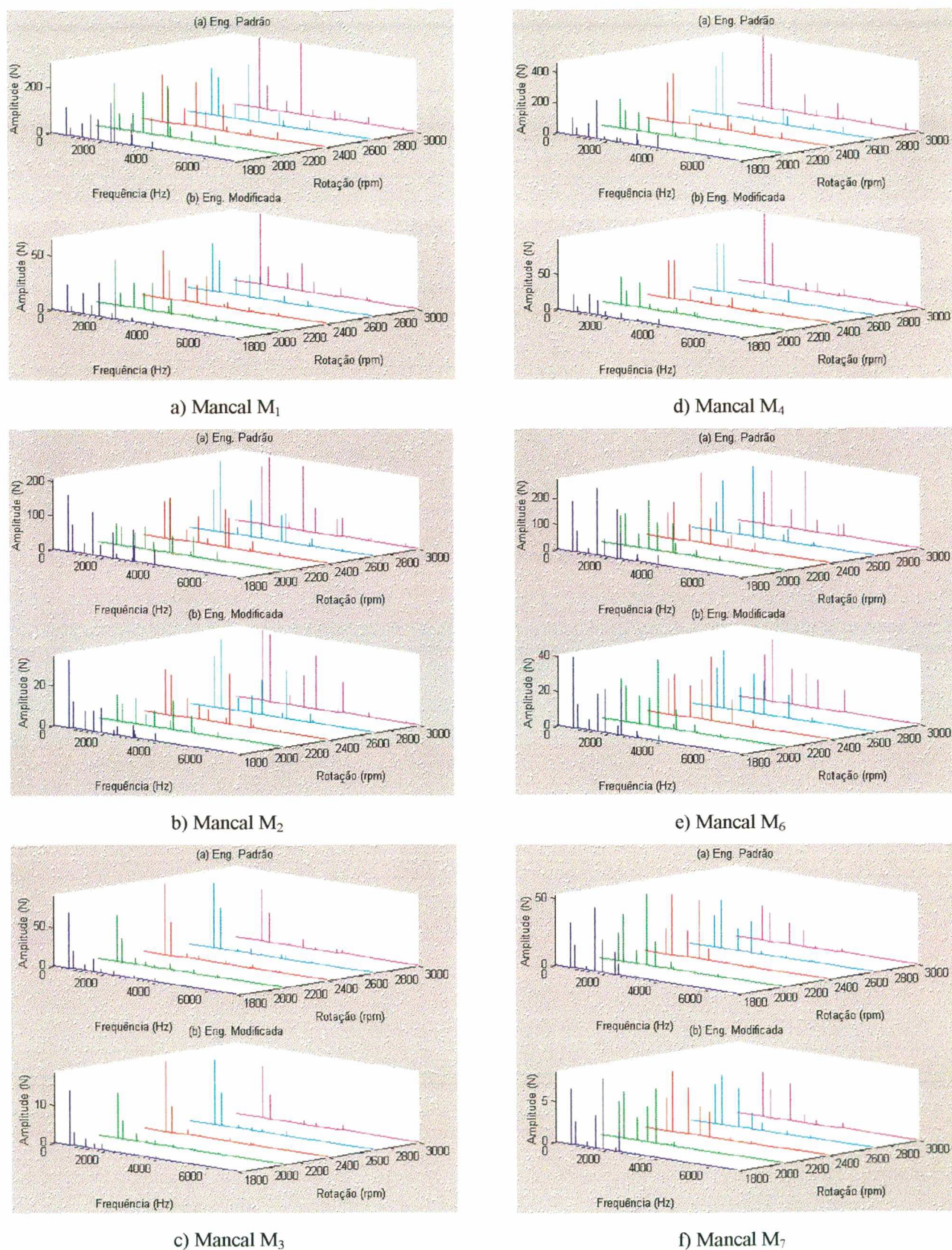


Figura 4.9 – Reação de apoio na direção X para carga de 100 % de T em 3<sup>a</sup> marcha.



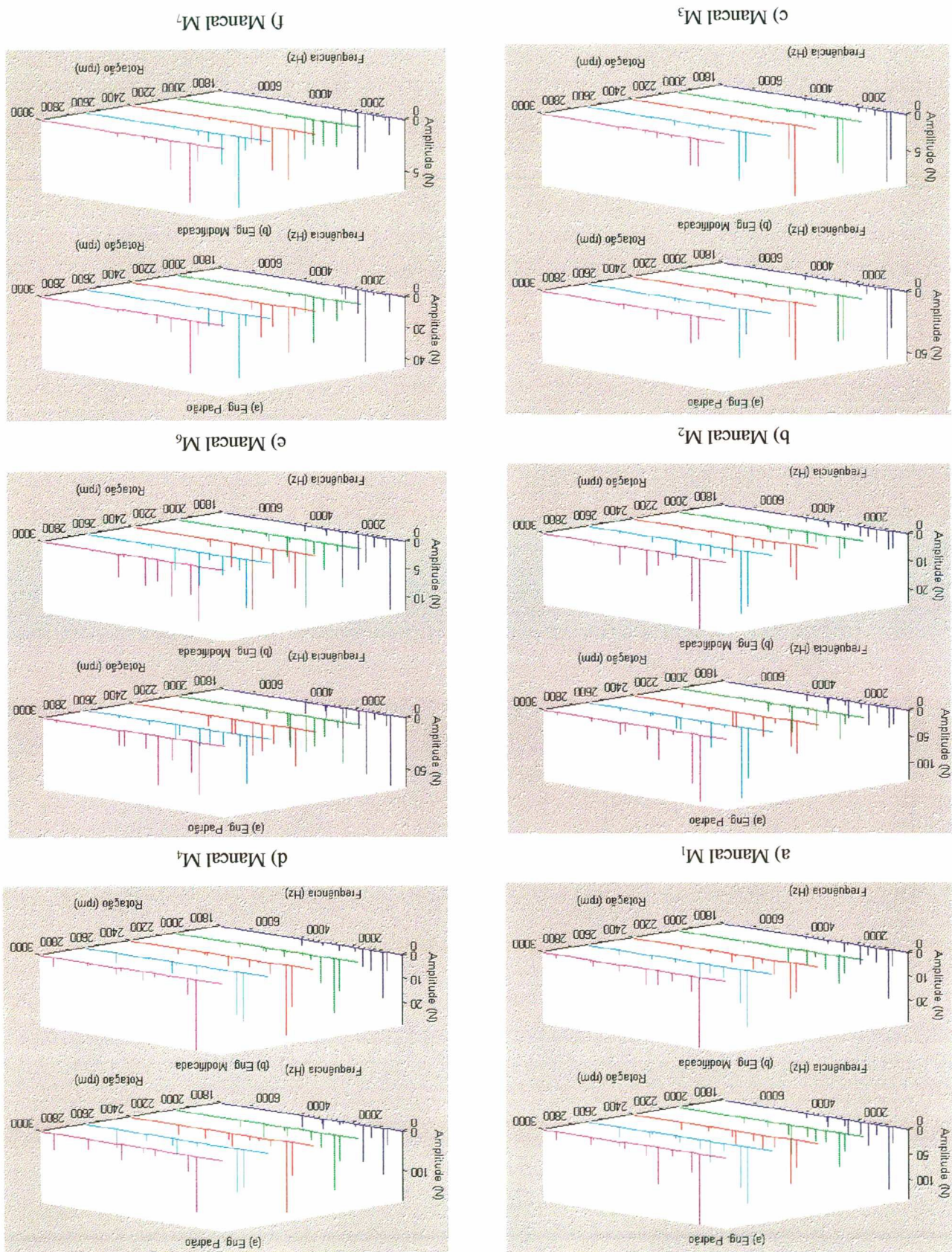


Figura 4.10 – Reação de apoio na direção Y para carga de 100 % de T em 3ª marcha.



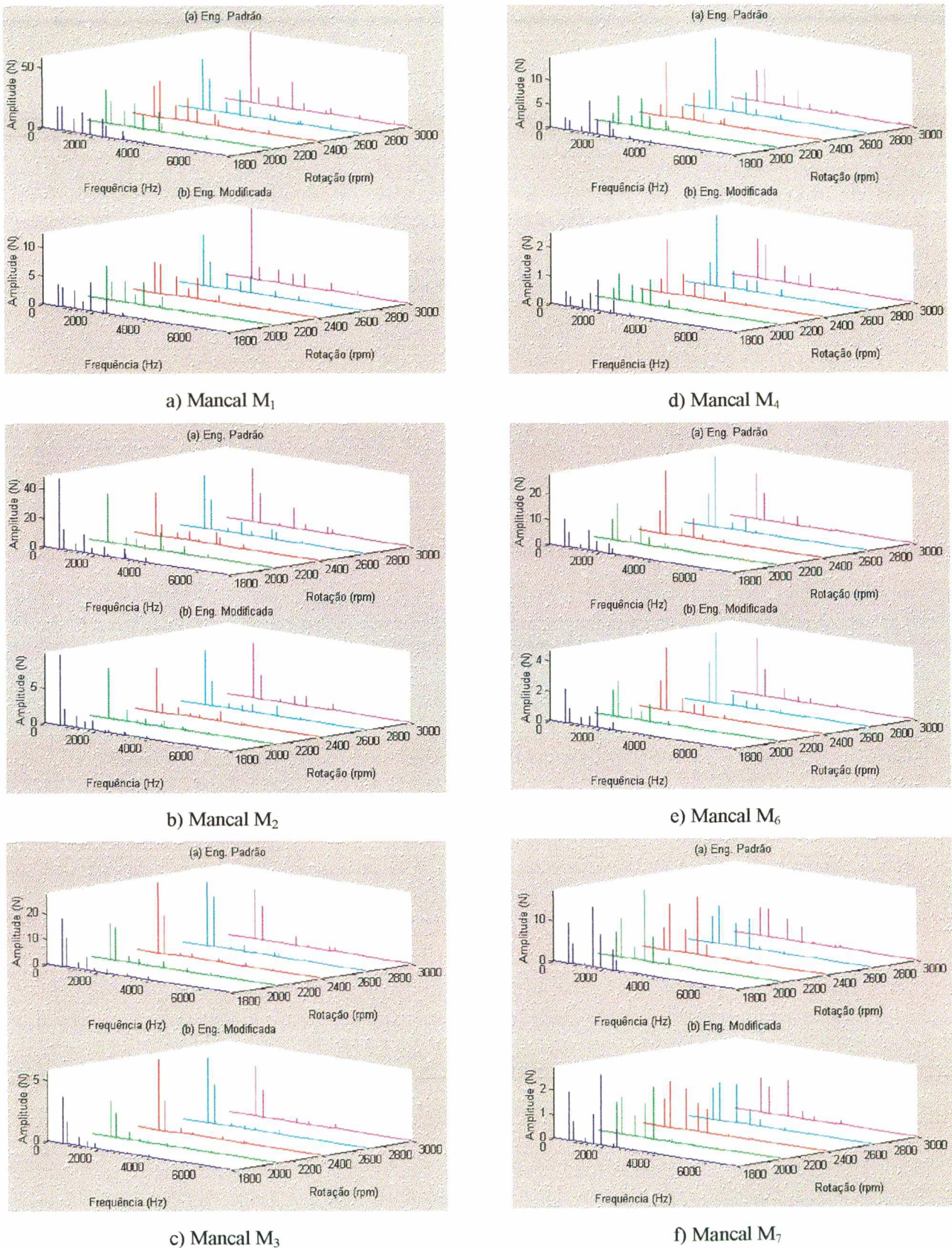


Figura 4.11 – Reação de apoio na direção Z para carga de 100 % de T em 3ª marcha.



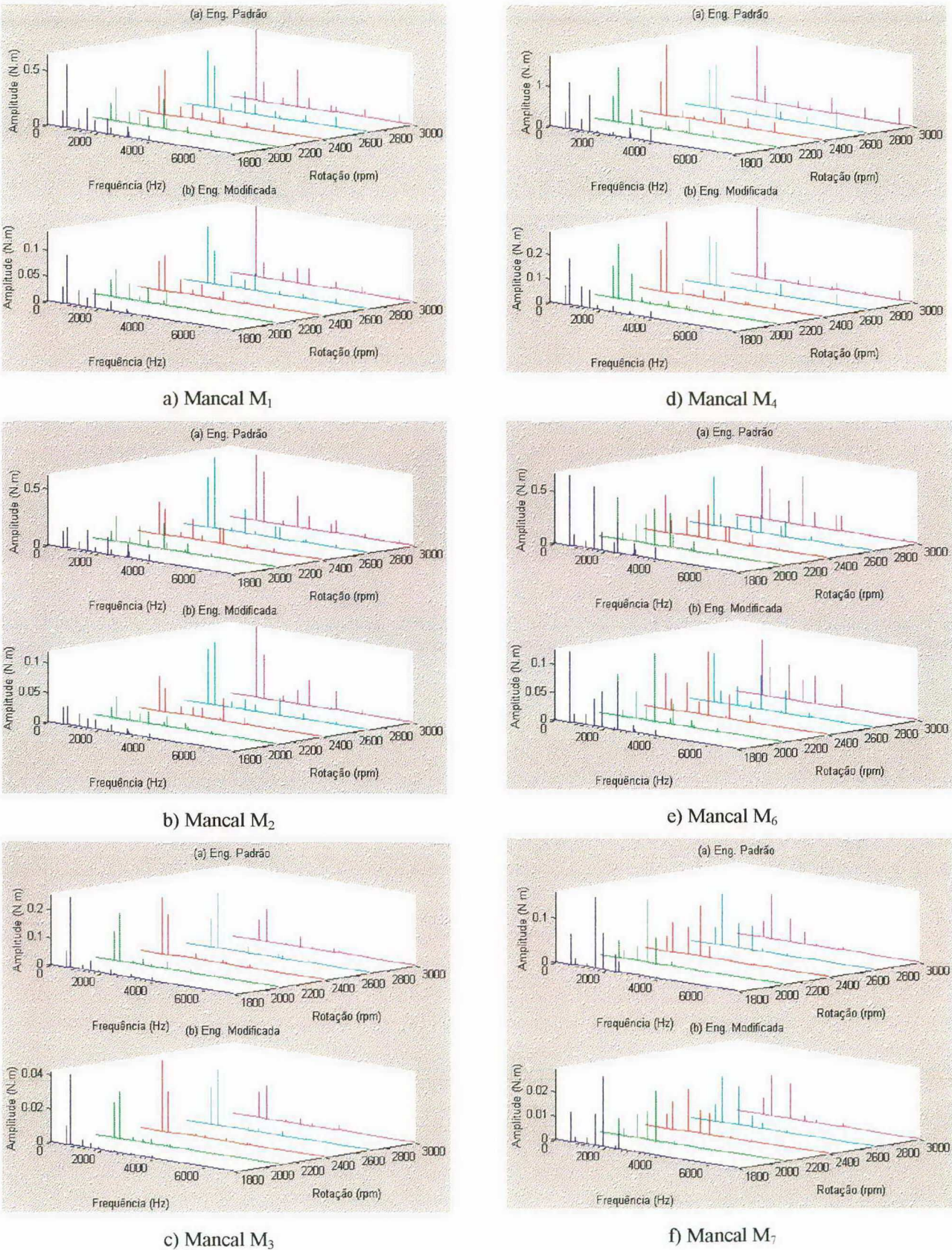
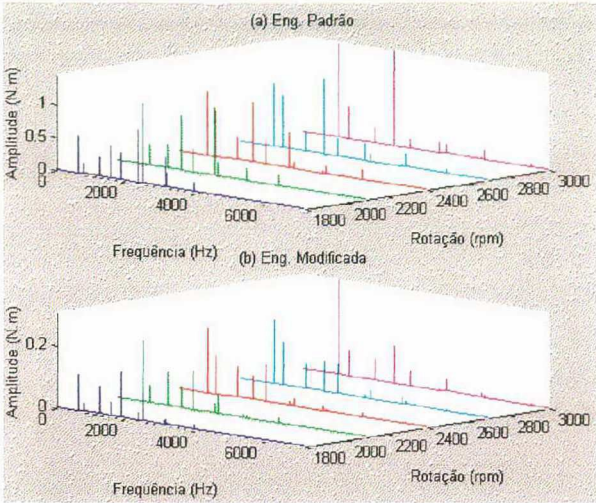
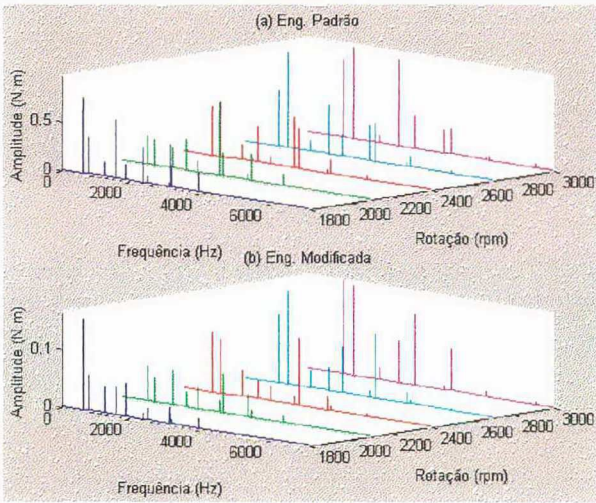


Figura 4.12 – Momento em torno do eixo X para carga de 100 % de T em 3ª marcha.

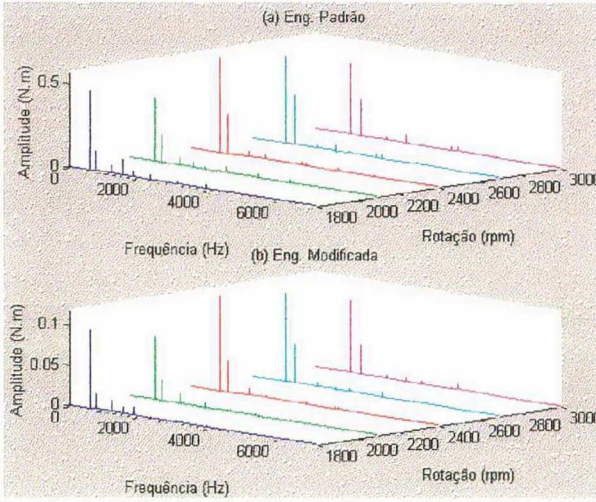




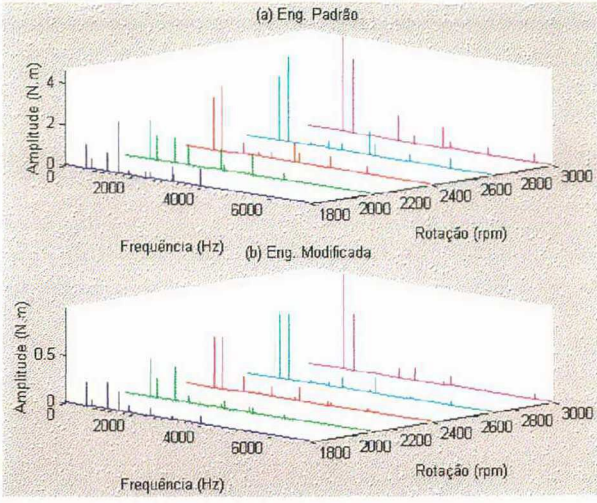
a) Mancais M<sub>1</sub>



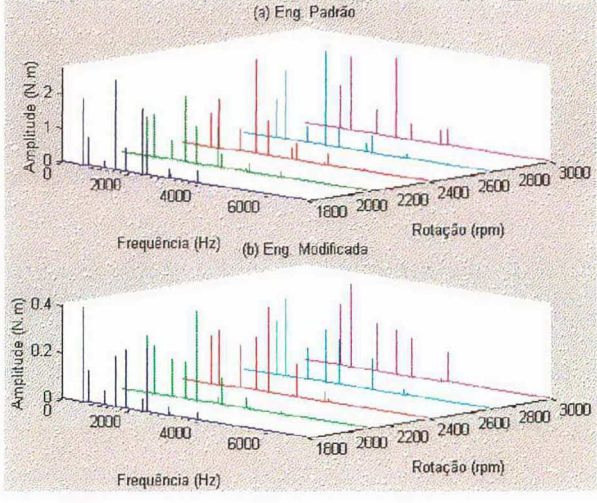
b) Mancais M<sub>2</sub>



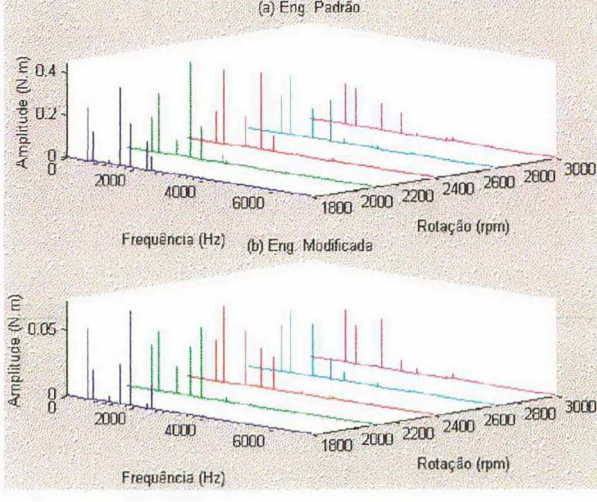
c) Mancais M<sub>3</sub>



d) Mancais M<sub>4</sub>



e) Mancais M<sub>6</sub>



f) Mancais M<sub>7</sub>

Figura 4.13 – Momento em torno do eixo Y para carga de 100 % de T em 3ª marcha.



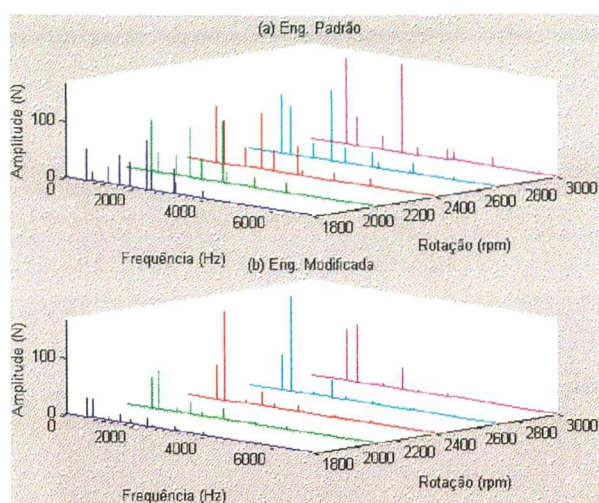
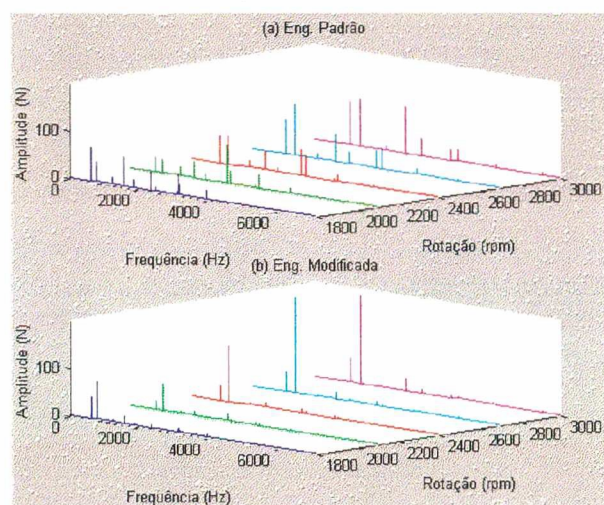
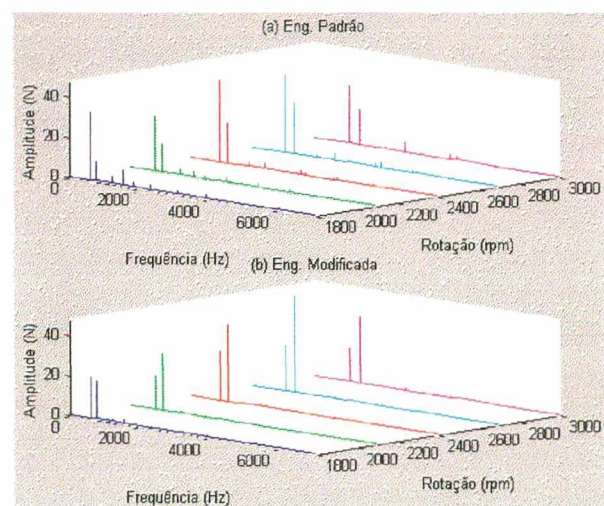
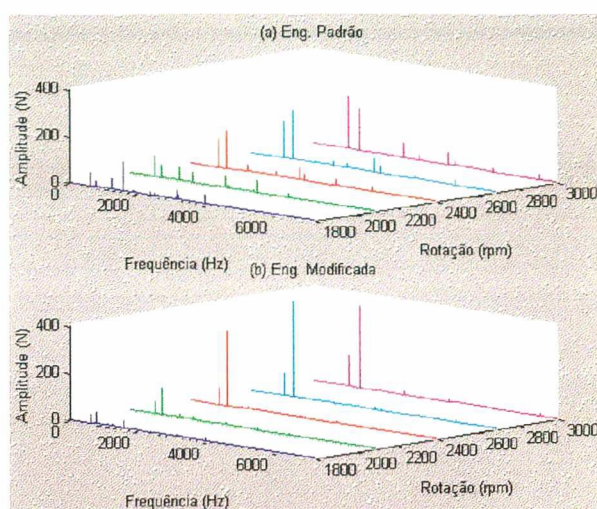
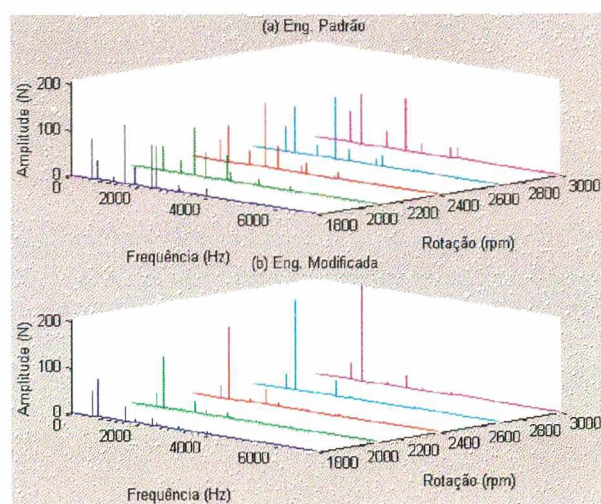
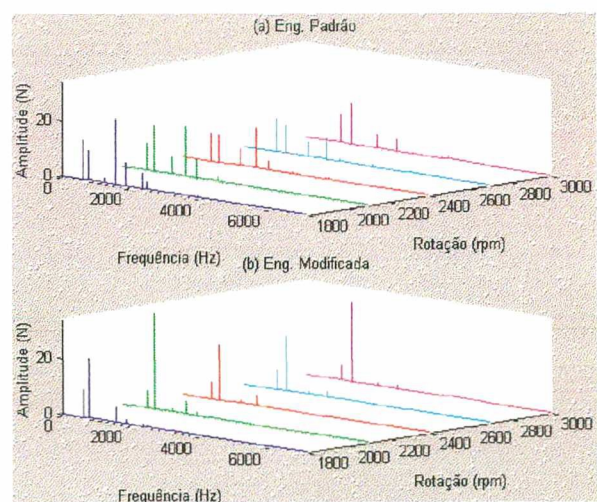
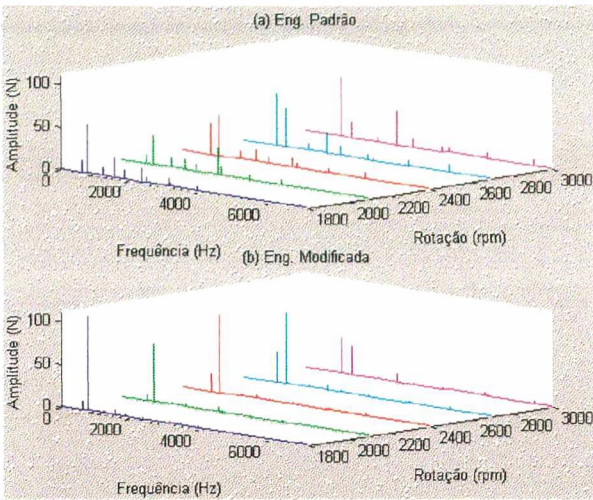
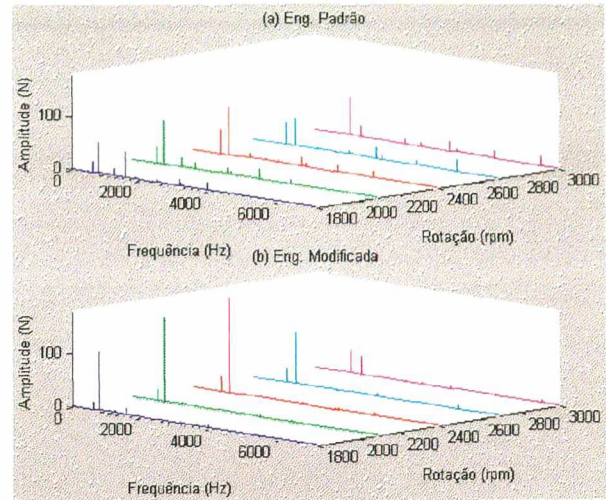
a) Manca  $M_1$ b) Manca  $M_2$ c) Manca  $M_3$ d) Manca  $M_4$ e) Manca  $M_6$ f) Manca  $M_7$ 

Figura 4.14 – Reação de apoio na direção X para carga de 50 % de T em 3ª marcha.

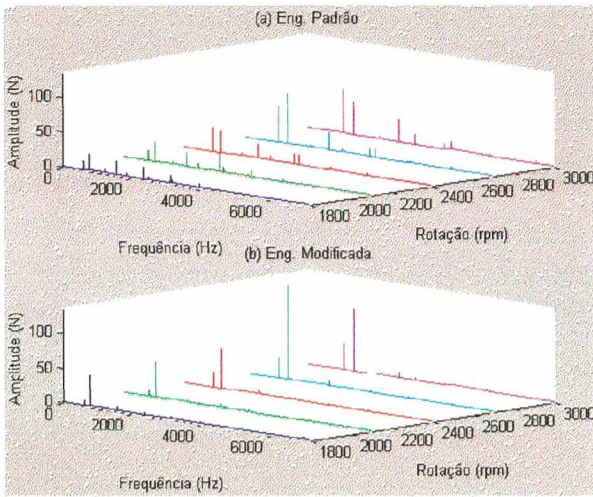




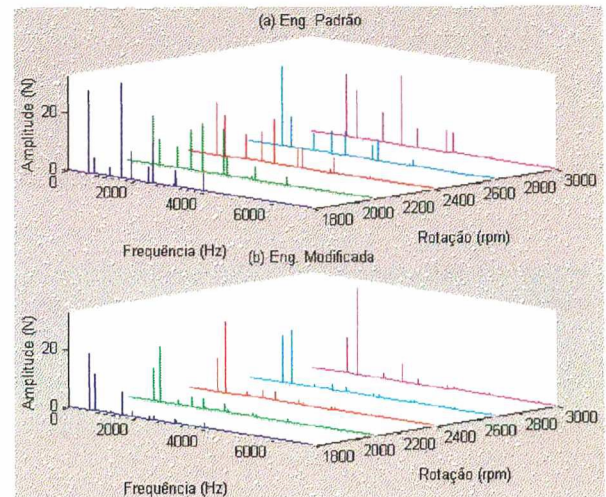
a) Mancais  $M_1$



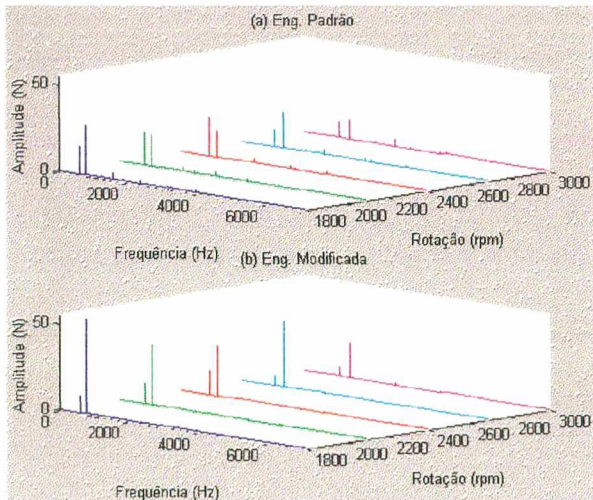
d) Mancais  $M_4$



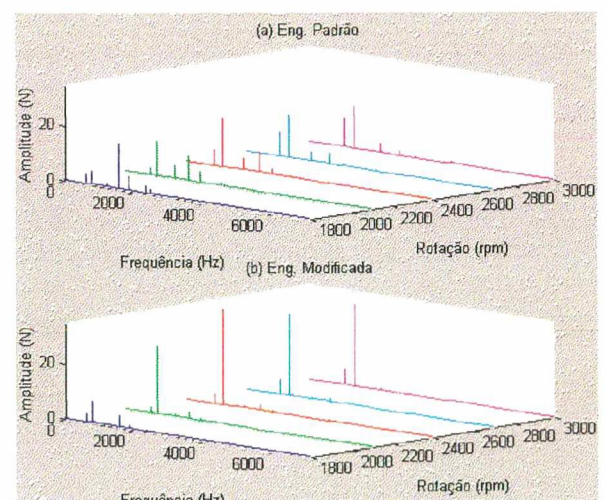
b) Mancais  $M_2$



c) Mancais  $M_6$



c) Mancais  $M_3$



f) Mancais  $M_7$

Figura 4.15 – Reação de apoio na direção Y para carga de 50 % de T em 3ª marcha.



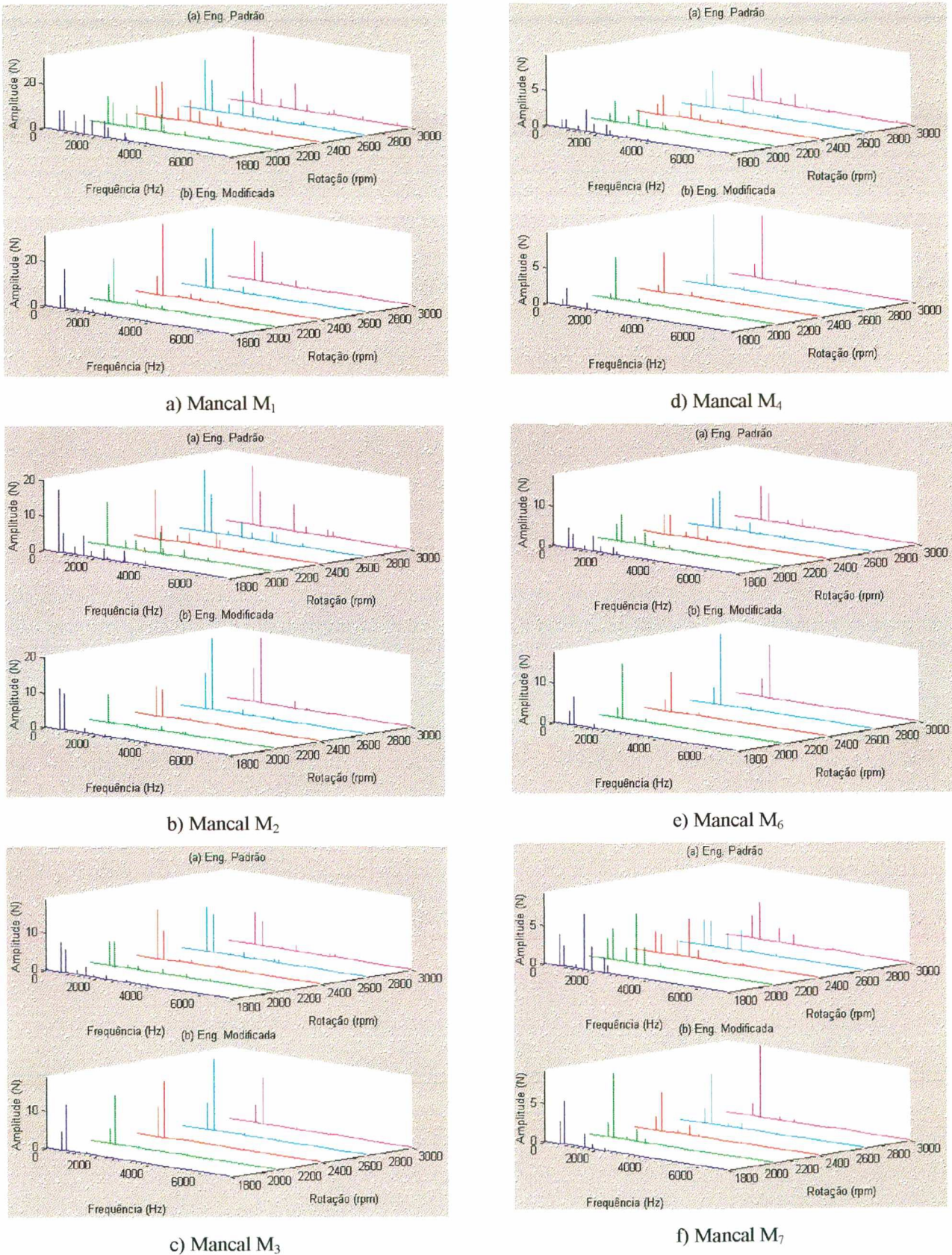


Figura 4.16 – Reação de apoio na direção Z para carga de 50 % de T em 3ª marcha.



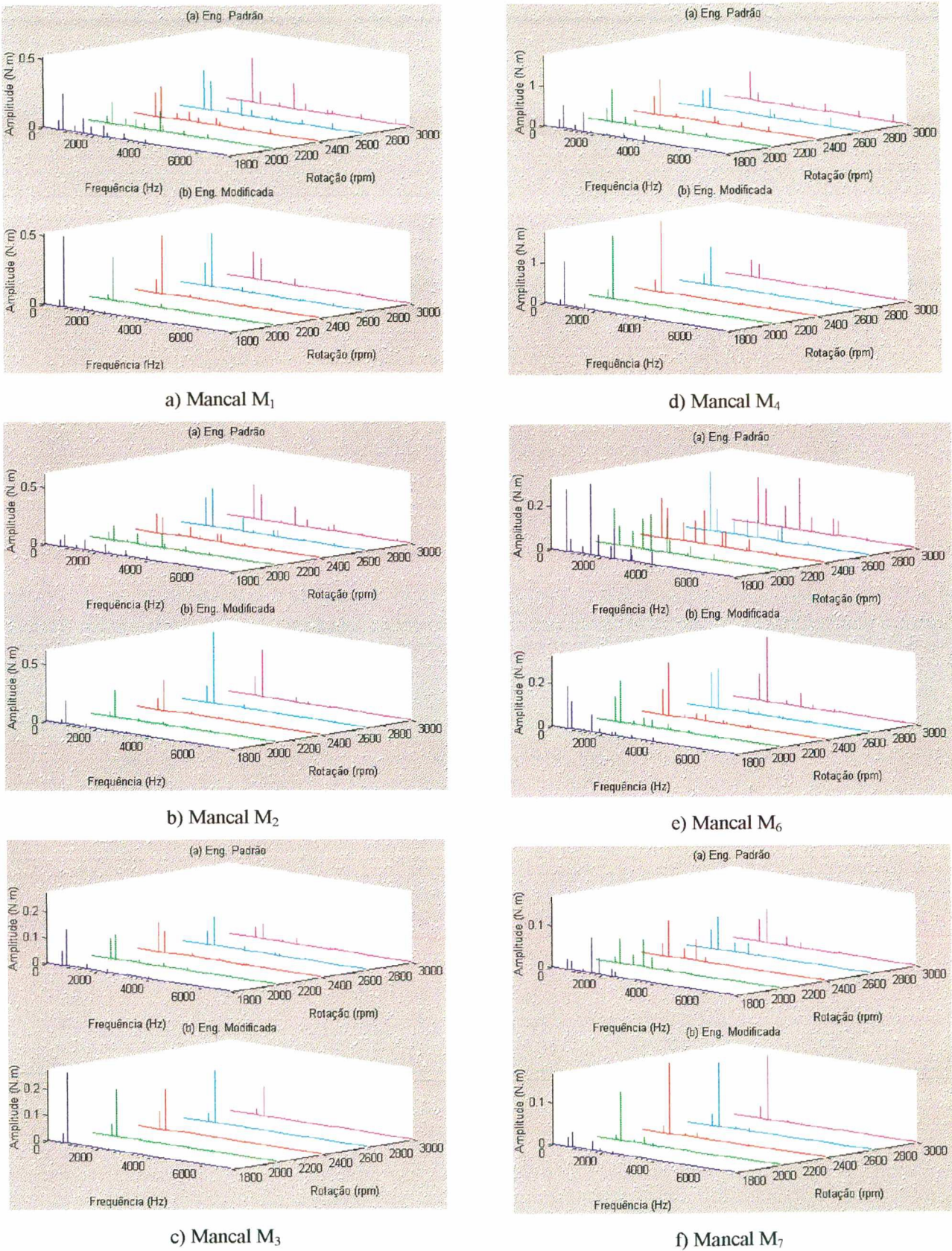


Figura 4.17 – Momento em torno do eixo X para carga de 50 % de T em 3ª marcha.



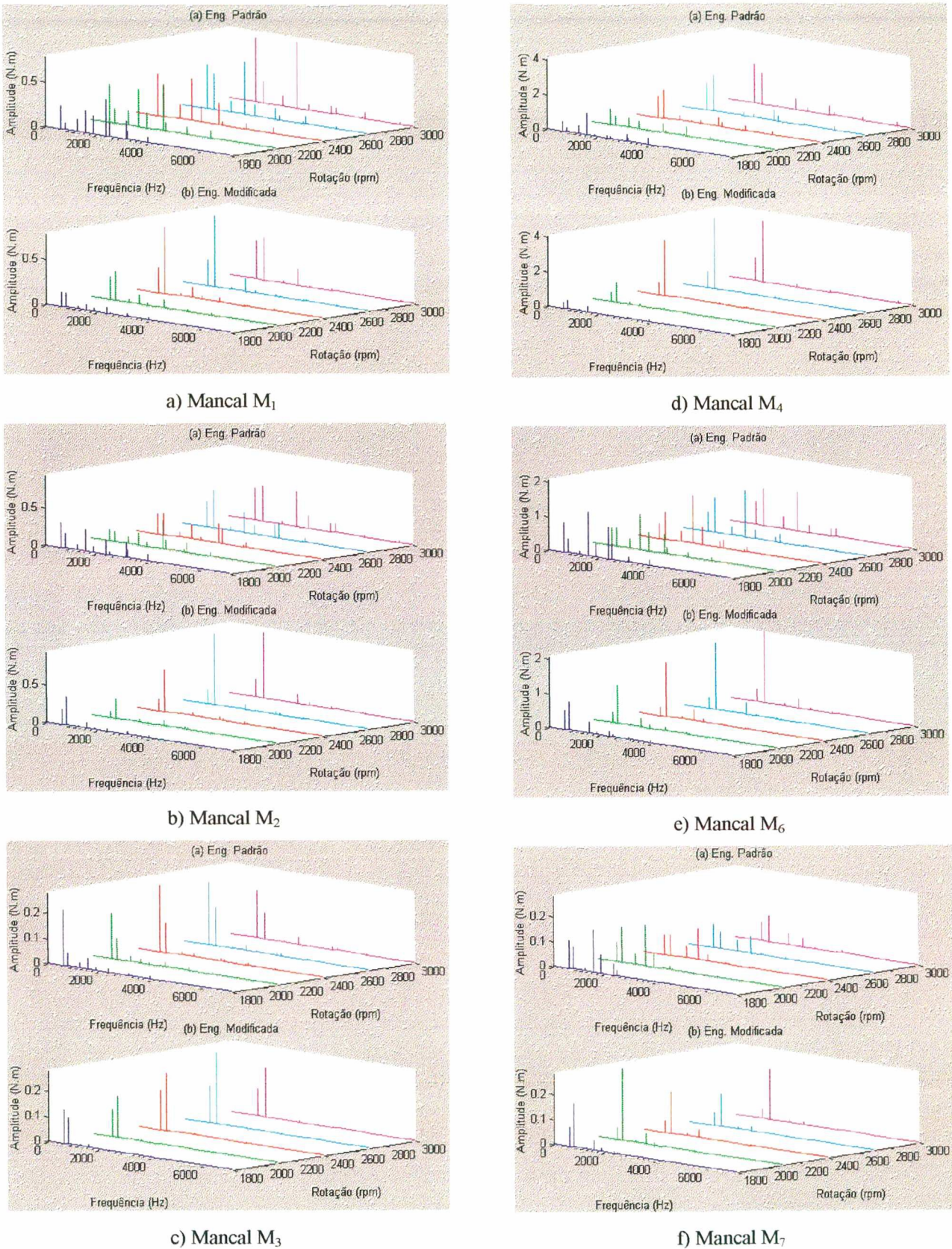


Figura 4.18 – Momento em torno do eixo Y para carga de 50 % de T em 3ª marcha.



O fato comentado no final do parágrafo anterior ocorre por serem os dentes das engrenagens flexíveis e, assim sendo, quando o dente é submetido à carga ele defletirá de um certo valor fazendo com que o próximo par de dentes entre em contato com uma interferência inicial que corresponderá ao mesmo valor da deflexão do par de dentes anterior. Essa interferência inicial ocorre no topo do dente e causaria altas tensões locais com possibilidades de provocar danos severos no dente. Para evitar a interferência, os dentes afastam-se de uma evolvente pura (perfil padrão) tal que o contato inicial no topo tenha folga, permitindo que os dentes possam entrar suavemente em contato longe do topo. A quantidade de alívio de topo necessária depende da carga que atua no dente da engrenagem e o efeito de um alívio de topo que permita cargas elevadas é o de dar vibrações a baixas cargas, pois nas cargas altas as deflexões dos dentes são tais que elas tendem a cancelar os efeitos de alívio de topo e o contato é suave, o que não ocorre em cargas mais baixas. Assim, os parâmetros que descrevem o engrenamento, ou seja rigidez de engrenamento e erro de transmissão, refletem as alterações feitas no perfil dos dentes das engrenagens fornecendo valores de auto excitação que levam ao comportamento apresentado nas Fig. 4.9 a 4.18.

Uma observação que deve ser feita é que, embora a modelagem do par de engrenagens acopladas negligencie os esforços que atuam na direção axial (direção Z), o modelo apresentado neste capítulo determina valores de carga nos mancais nesta direção. Este fato é explicado pela presença de coeficientes de rigidez na matriz que representa os mancais e, ainda, devido à existência de deslocamentos, na direção Z, provocados pela vibração transversal do sistema.

Para a condição de 1ª marcha, as mesmas tendências já comentadas anteriormente se manifestam sendo, entretanto, que o efeito da diminuição dos valores de amplitude das reações nos mancais, provocado pela modificação do perfil do dente das engrenagens, não são tão significativos quanto para a condição de 3ª marcha, conforme pode ser constatado através das Fig. 4.19 a 4.22, as quais mostram os valores de amplitude para a força na direção X e momento em torno do eixo de referência X, para as condições de 50 % e 100 % de T.

#### 4.5 - COMENTÁRIOS FINAIS

Neste capítulo foi apresentado um modelo de elementos finitos que permite a análise dinâmica de sistemas de rotores engrenados, de modo que são consideradas as vibrações torcionais e transversais dos eixos, bem como o efeito de flexibilidade dos mancais. O efeito de auto excitação do engrenamento foi incorporado usando uma excitação de deslocamento,



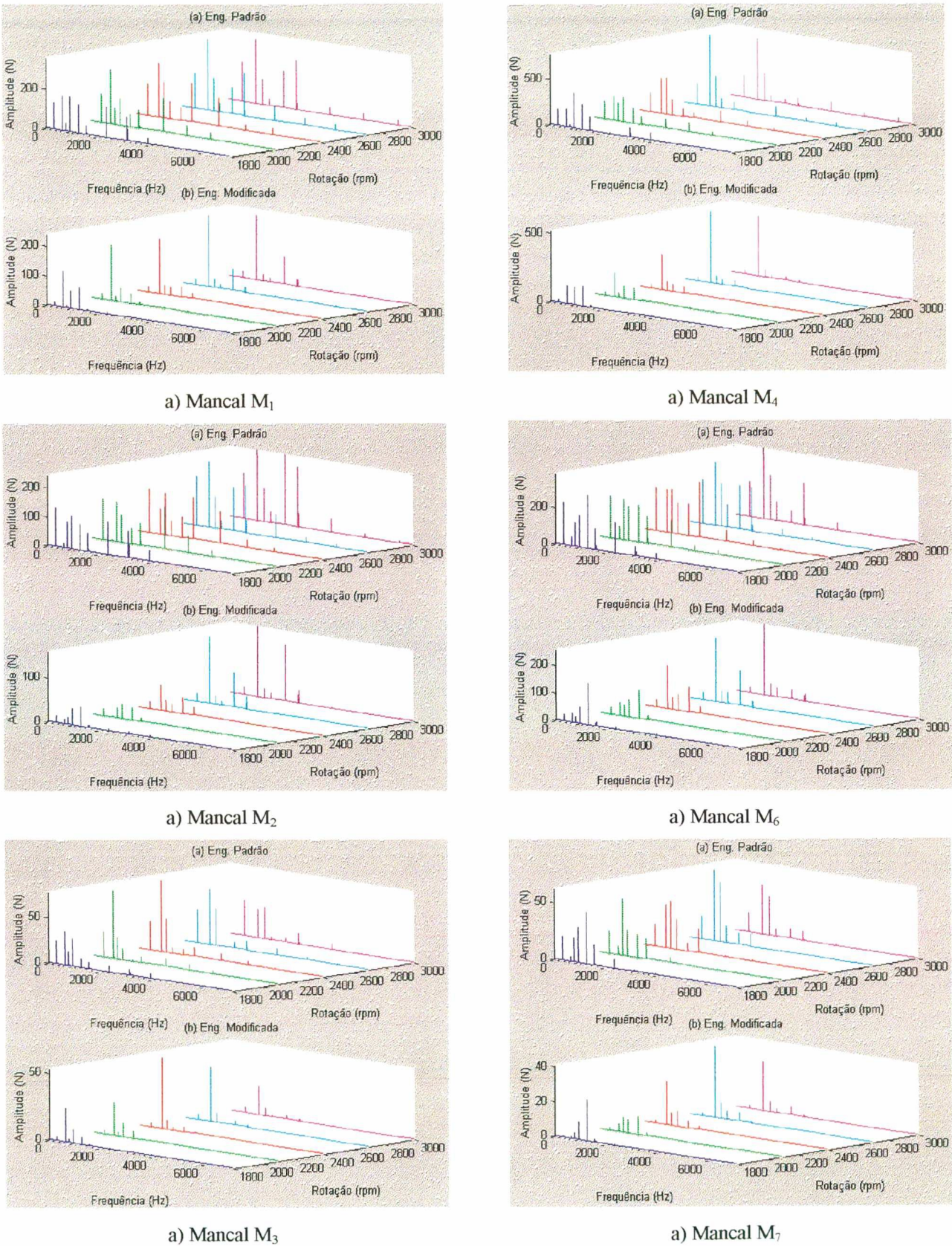


Figura 4.19 – Reação de apoio na direção X para carga de 100 % de T em 1ª marcha.



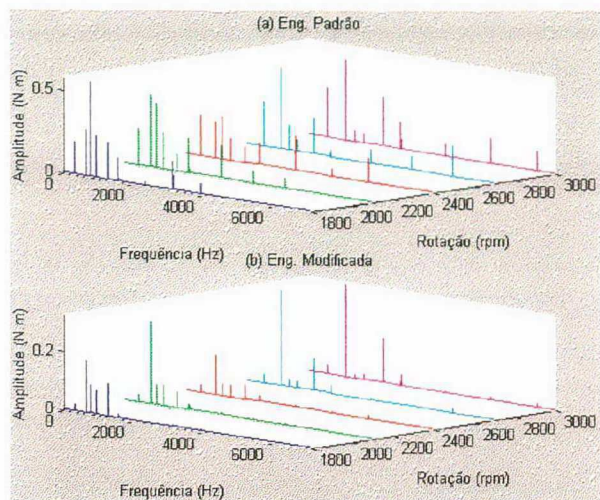
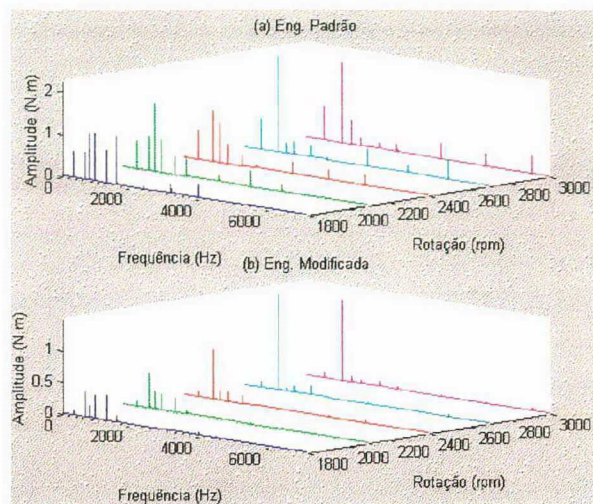
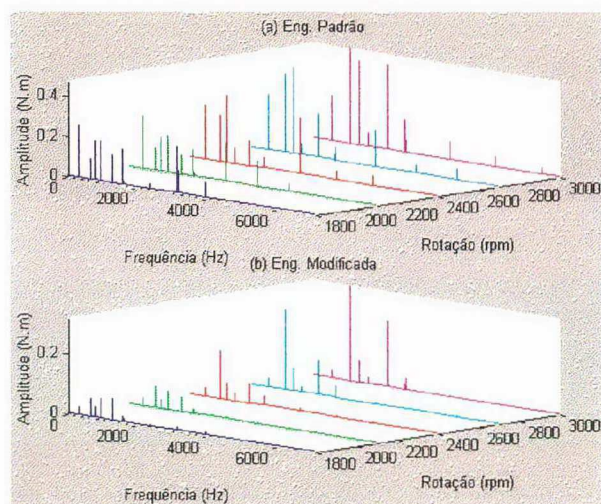
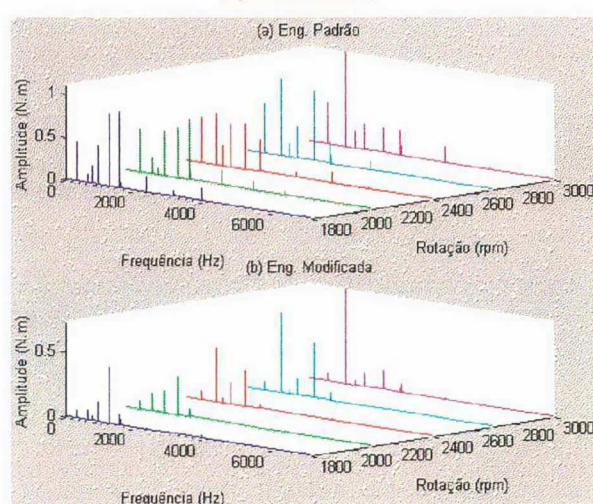
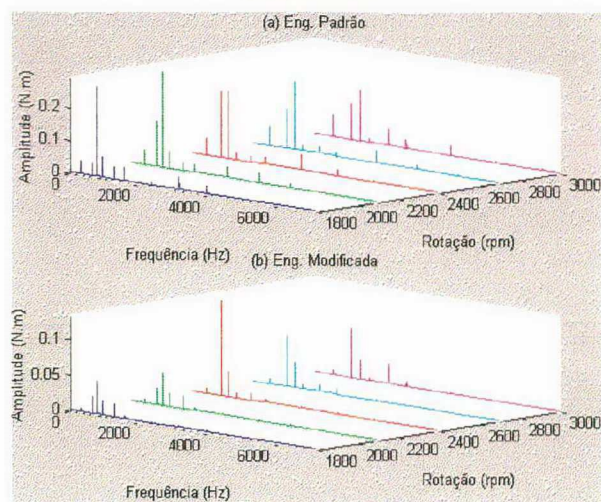
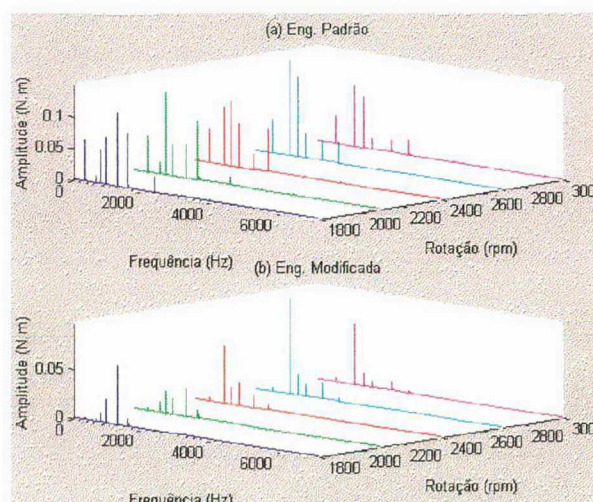
a) Mancais  $M_1$ d) Mancais  $M_4$ b) Mancais  $M_2$ e) Mancais  $M_6$ c) Mancais  $M_3$ f) Mancais  $M_7$ 

Figura 4.20 – Momento em torno do eixo X para carga de 100 % de T em 1ª marcha.



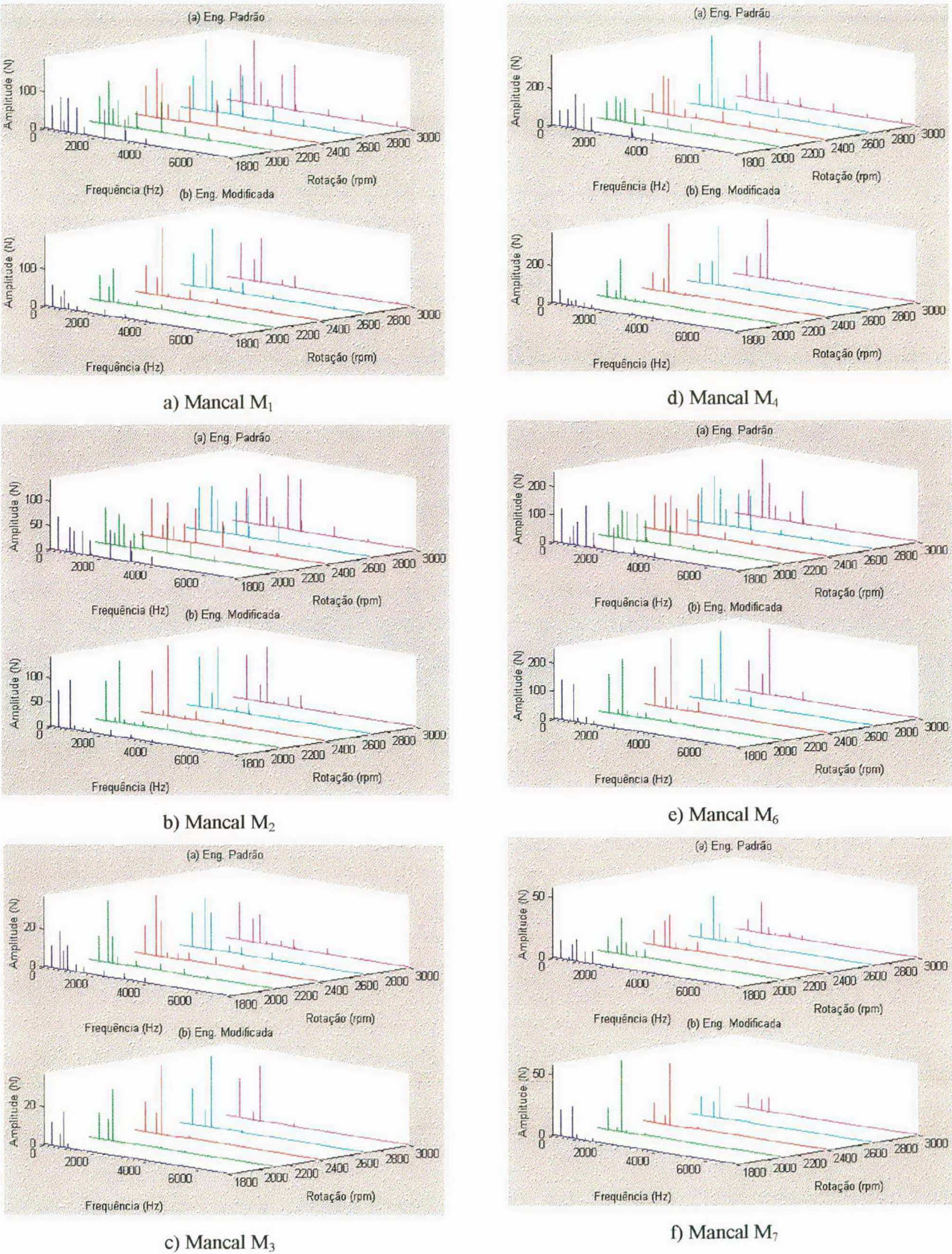
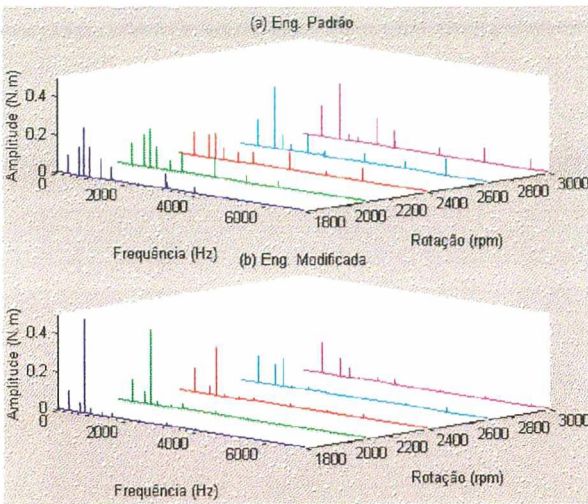
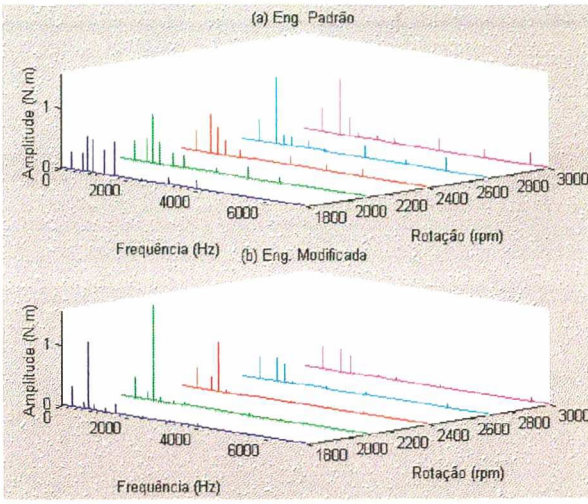


Figura 4.21 – Reação de apoio na direção X para carga de 50 % de T em 1ª marcha.

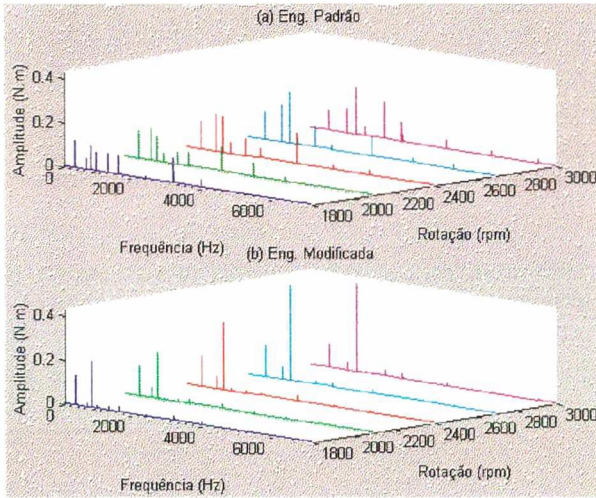




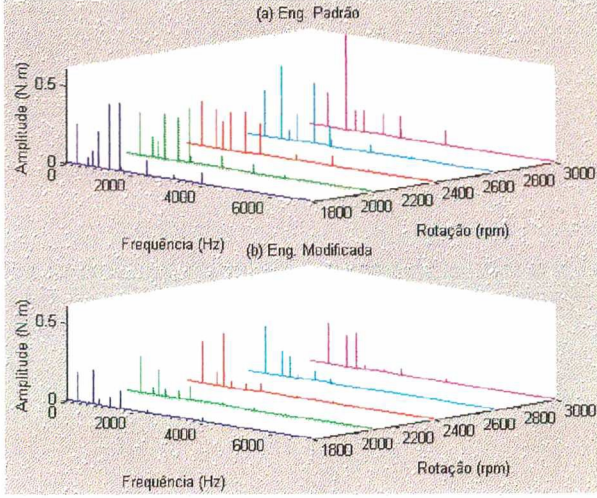
a) Manca  $M_1$



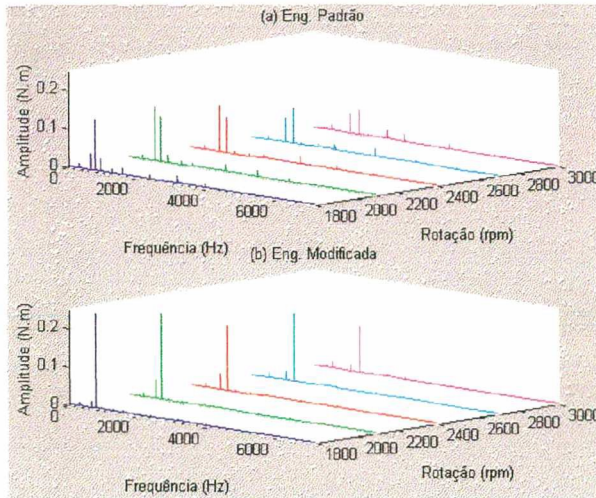
d) Manca  $M_4$



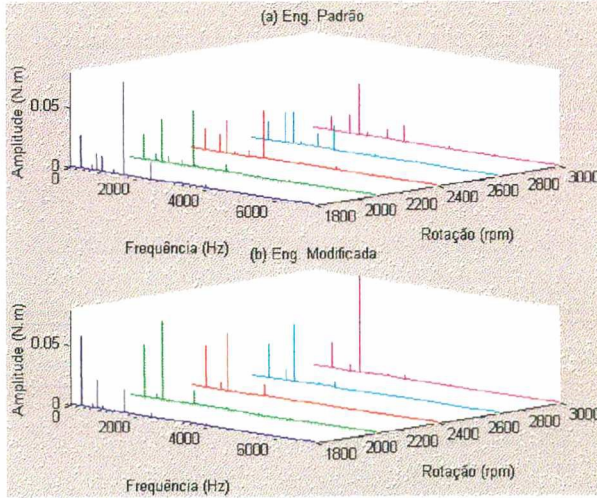
b) Manca  $M_2$



e) Manca  $M_6$



c) Manca  $M_3$



f) Manca  $M_7$

Figura 4.22 – Momento em torno do eixo X para carga de 50 % de T em 1ª marcha.

referente ao erro de transmissão estático, tendo sido assumida uma rigidez de engrenamento constante. O modelo apresentado permite a determinação dos parâmetros modais do sistema e sua resposta forçada, para excitação imposta pelo engrenamento, bem como uma estimativa dos vetores de carga que atuam no mancal, representados por componentes de forças e momentos de reação.

Por outro lado, deve-se destacar que a quantificação dos momentos que atuam sobre os mancais só é possível graças ao modelo de mancal desenvolvido no Capítulo 2, o que é um avanço quando se compara os modelos da Fig. 4.3 com modelos de rotores engrenados desenvolvidos por outros pesquisadores. Estes momentos de reação são importantes uma vez que contribuem de forma significativa para o movimento de flexão do alojamento da caixa de engrenagem que, por sua vez, é o principal responsável pela potência sonora radiada em caixas de engrenagens.

Finalmente, o modelo de sistema de rotores engrenados desenvolvido neste capítulo permite, ainda, a realização de estudos paramétricos com o objetivo de se verificar a influência da flexibilidade dos mancais sobre as frequências naturais e resposta forçada do sistema para excitação harmônica, representada pela auto excitação do engrenamento, segundo um sistema de referência tridimensional, o que é geralmente negligenciado em modelos mais simples desenvolvidos para o estudo da dinâmica de engrenagens.



## **CAPÍTULO 5**

### **MODELO DO ALOJAMENTO: ANÁLISE MODAL NUMÉRICA E EXPERIMENTAL**

#### **5.1 - INTRODUÇÃO**

O alojamento é um componente estrutural importante em caixas de engrenagens uma vez que, além de suportar os seus componentes internos (eixos, engrenagens, rolamentos, etc ...) e de servir como reservatório de lubrificante, ele recebe e transmite a energia vibro-acústica tanto pelo meio fluido quanto via estrutural. Assim, o ruído radiado por uma caixa de engrenagem tem sua origem provocada, principalmente, pela vibração estrutural da superfície do alojamento.

Os alojamentos das caixas de engrenagem são estruturas extremamente complicadas, principalmente para as caixas de engrenagem usadas em veículos, devido a requisitos funcionais de rigidez sob cargas altas. Portanto, não é possível descrever de forma analítica suas características dinâmicas ou o seu comportamento sob condições específicas de carga, o que leva à utilização de métodos numéricos para atender essa finalidade.

Neste capítulo, apresenta-se o modelo numérico do alojamento de uma caixa de engrenagem de uso veicular, usando o Método de Elementos Finitos a partir de elementos finitos disponíveis na biblioteca de elementos do programa comercial ANSYS, que permite a determinação de suas frequências naturais e as formas modais a elas associadas. Uma análise modal experimental é apresentada junto com a validação do modelo numérico.

#### **5.2 – O MODELO DE ELEMENTOS FINITOS**

A criação do modelo de elementos finitos pode ser feita através de dois métodos básicos, que são conhecidos por modelagem direta e modelagem sólida. Na modelagem sólida, o procedimento empregado faz a descrição do contorno geométrico do modelo, a seleção do tipo de elemento, o estabelecimento de controle sobre o tamanho e a forma dos elementos e, com base nestas informações, a geração automática da malha de elementos finitos. Por outro lado, a modelagem direta é feita definindo a malha a partir das informações de localização de cada nó e do tipo, tamanho, forma e conectividade de cada elemento antes de definir estas entidades no modelo. Portanto, o método de modelagem direta é um procedimento manual tedioso que, para

grandes modelos, contribui para os erros de modelagem, enquanto que o método de modelagem sólida é mais potente e versátil, sendo o mais indicado para a construção do modelo, principalmente, quando a geometria da estrutura é complexa.

As informações para geração do contorno geométrico do alojamento foram obtidas a partir do mapeamento de pontos de sua superfície e registro dos pares ordenados (x,y,z) feitos por uma máquina de medição de três coordenadas, de propriedade da Fundação CERTI-UFSC, conforme mostrado na Fig. 5.1, bem como a utilização de fotocópia reduzida de desenhos, que permitiam a visualização de cortes transversal e longitudinal do alojamento e, ainda, informações adicionais obtidas através de paquímetro em um alojamento cedido pelo fabricante da caixa de engrenagem.

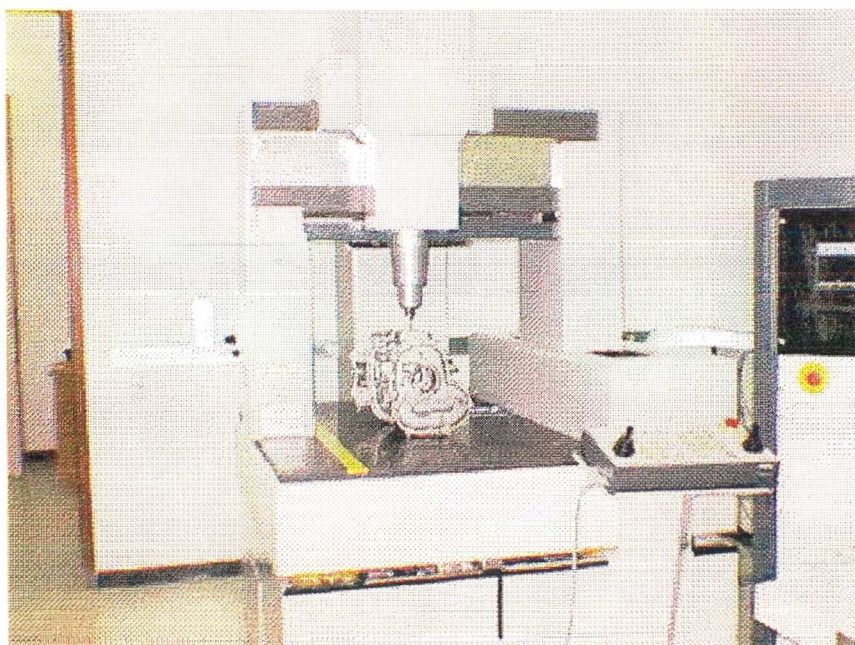


Figura 5.1 – Medição de pares ordenados dos pontos na superfície do alojamento.

No programa ANSYS, na fase de pré-processamento, os recursos de modelagem sólida foram usados iniciando-se com as entidades geométricas mais simples, ou seja os pontos de base (*keypoints*), os quais permitiram a criação de linhas e áreas que definiram toda a superfície do alojamento, permitindo a geração da malha de elementos finitos. Esta malha foi obtida com base na utilização dos elementos SHELL63 e BEAM44 disponíveis na biblioteca do ANSYS V. 5.4. O elemento SHELL63 foi usado para representar a superfície das três partes do alojamento, ou seja o corpo e as tampas dianteira e traseira. Esse elemento tem capacidade de membrana e flexão e apresenta seis graus de liberdade por nó. Por outro lado, para representar os reforços de



nervura presentes nas tampas e corpo do alojamento, foi selecionado o elemento BEAM44, que é um elemento uniaxial com capacidade de tensão, compressão, torção e flexão, permitindo que os nós das extremidades do elemento sejam deslocados do seu eixo centroidal (*offsets*) e, assim, levando em consideração o efeito de compressão axial que se manifesta devido ao fato do eixo neutro da viga não estar contido na superfície neutra sobre a qual o elemento SHELL63 é mapeado. Este elemento, como o elemento SHELL63, possui seis graus de liberdade por nó.

Para definir apropriadamente a forma dos modos de vibração da caixa de engrenagem, um tamanho adequado de malha deve ser usado. Assim, para uma primeira aproximação, um tamanho de elemento que é preciso para definir a forma modal de uma placa fina em uma dada frequência, pode ser determinado calculando o comprimento de onda de flexão da placa.

Junger [37] apresenta a seguinte equação para o número de onda de uma placa fina com condições de contorno livre-livre:

$$k = \left[ \frac{\rho t \omega^2}{D} \right]^{1/4} \quad (5.1)$$

onde  $\rho$  é a massa específica do material da placa,  $t$  sua espessura,  $\omega$  a frequência e  $D$  a rigidez à flexão da placa definida por:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (5.2)$$

com  $E$  representando o módulo de elasticidade do material da placa e  $\nu$  o coeficiente de Poisson.

Substituindo a definição do número de onda na Eq. (5.1), temos:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega}} \left[ \frac{D}{\rho h} \right]^{1/4} \quad (5.3)$$

Após calcular o comprimento de onda de flexão da placa para a mais alta frequência de interesse, é possível se fazer um julgamento do tamanho da malha necessário para se definir os modos de vibração de flexão de ordem mais altas.

Alguns testes foram feitos para diferentes malhas, com o tamanho do elemento arbitrado tendo por base a informação obtida pela Eq. (5.3), com  $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$ ,  $\nu = 0,33$ ,  $E = 7,1\text{E}+10 \text{ N/m}^2$ ,  $t = 7 \text{ mm}$  e  $f = 5000 \text{ Hz}$ . Um total de 6 malhas foram usadas com o tamanho do elemento variando de tal modo que tivéssemos cerca de 5 a 15 elementos por comprimento de onda.

As Fig. 5.2, 5.3 e 5.4 mostram, respectivamente, a variação do peso da estrutura, tempo de processamento e comparação das frequências para modos distintos, a qual toma como referência a malha com tamanho de elemento de 8 mm. Assim, tendo por base os dados dessas figuras e a necessidade de se minimizar o aparecimento de *warping*, ou seja, o empenamento do elemento de casca que ocorre quando os nós do elemento quadrilátero não se encontram em um mesmo plano, foi selecionada a malha cujo tamanho de elemento é de 12 mm, com um total de 7764 elementos do tipo SHELL63, 987 elementos do tipo BEAM44 e um total de 7155 nós, a qual é mostrada na Fig. 5.5. As propriedades geométricas dos elementos BEAM44 estão na tabela 5.1.

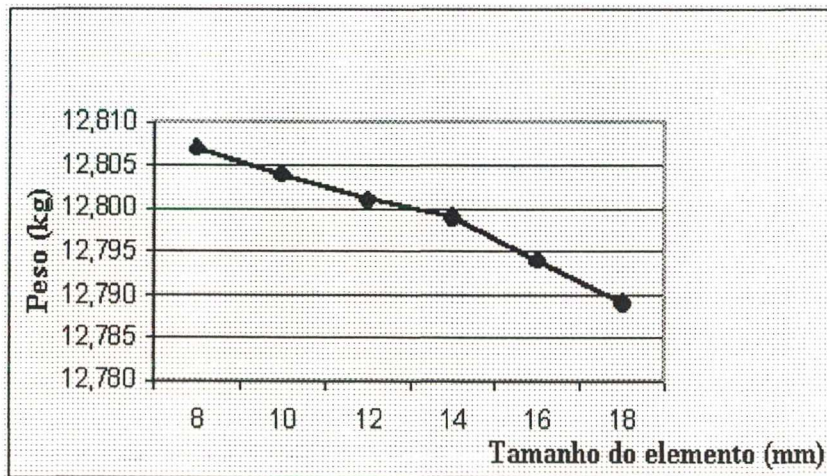


Figura 5.2 - Variação do peso do modelo do alojamento.

### 5.3 – ANÁLISE MODAL NUMÉRICA

A análise modal numérica é um procedimento computadorizado que permite a determinação das frequências naturais e formas modais de uma estrutura através da extração de autovalores, possibilitada pelo uso de um modelo de elementos finitos e de procedimentos padrões de extração (Jacobi, QR, Iteração de Sub-Espaço, ...), com a obtenção da matriz de autovetores a eles associada. A equação matricial e a formulação do problema de autovalor-autovetor, relativos ao método de elementos finitos, foram apresentadas no capítulo 4.

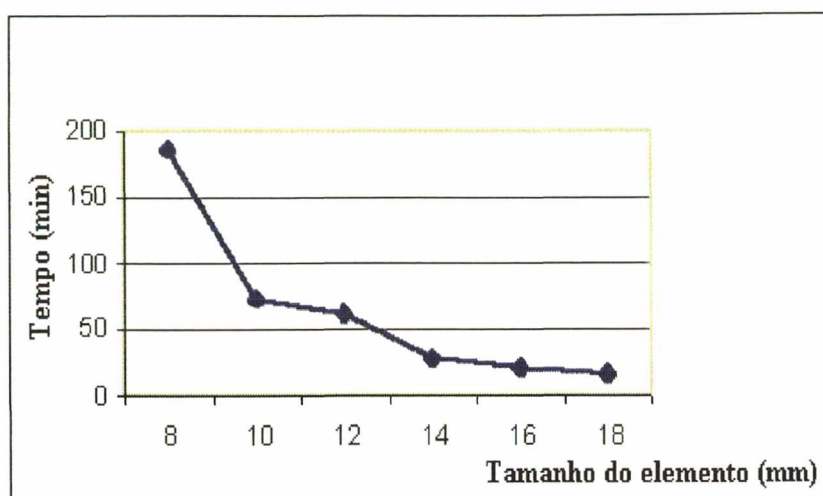


Figura 5.3 - Variação do tempo de processamento.

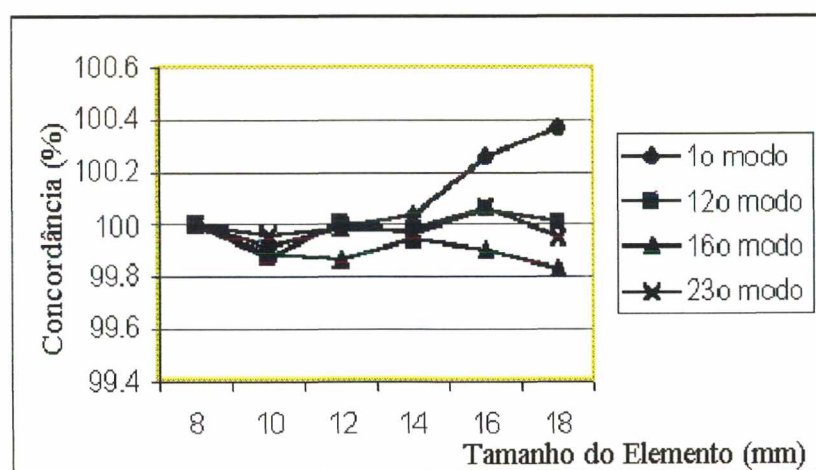


Figura 5.4 - Comparação das frequências de diferentes modos.

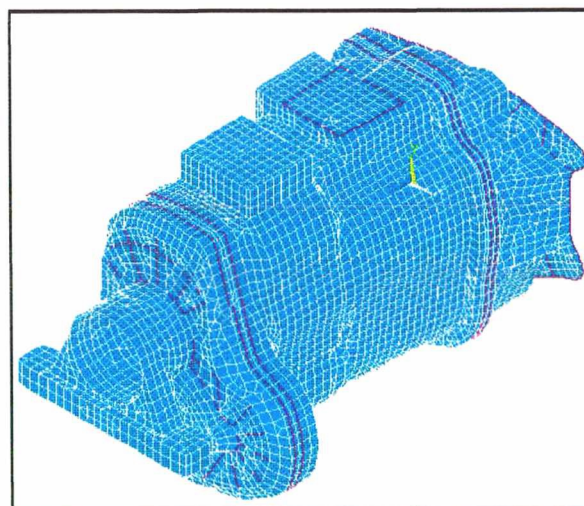


Figura 5.5 - Modelo de elementos finitos do alojamento.



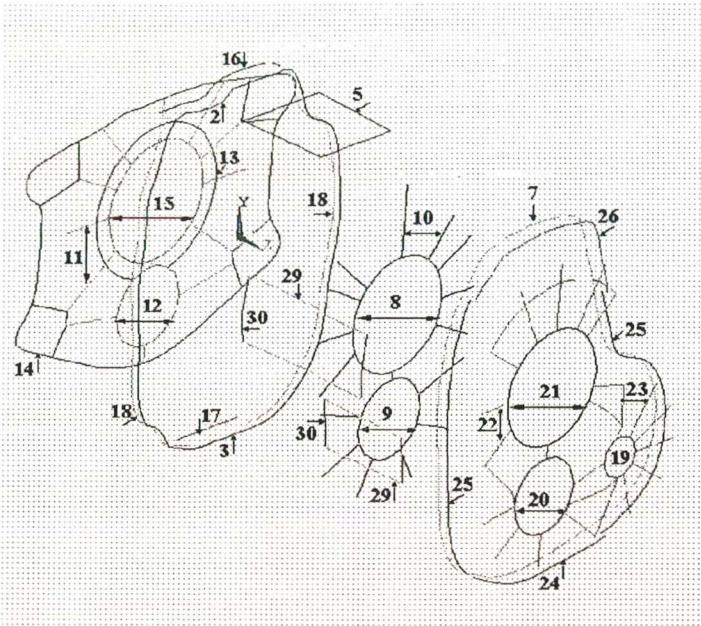


Tabela 5.1 – Propriedades geométricas dos elementos BEAM44.

| Número | Área<br>(mm <sup>2</sup> ) | Altura<br>(mm) | Espessura<br>(mm) | Iz<br>(mm <sup>4</sup> ) | Iy<br>(mm <sup>4</sup> ) | Offset y<br>(mm) | Offset z<br>(mm) |
|--------|----------------------------|----------------|-------------------|--------------------------|--------------------------|------------------|------------------|
| 2      | 224,00                     | 14,00          | 16,00             | 4778,70                  | 3658,70                  | -11,50           | 0,00             |
| 3      | 36,00                      | 9,00           | 4,00              | 48,00                    | 243,00                   | -5,50            | 0,00             |
| 4      | 140,00                     | 14,00          | 10,00             | 1166,70                  | 2286,70                  | -8,50            | 0,00             |
| 5      | 150,00                     | 15,00          | 10,00             | 1250,00                  | 2812,50                  | -10,00           | 0,00             |
| 6      | 112,00                     | 14,00          | 8,00              | 597,33                   | 1829,30                  | -7,50            | 0,00             |
| 7      | 70,00                      | 14,00          | 5,00              | 145,83                   | 1143,30                  | -6,00            | 0,00             |
| 8      | 240,00                     | 24,00          | 10,00             | 2000,00                  | 11520,00                 | 0,00             | 15,50            |
| 9      | 192,00                     | 24,00          | 8,00              | 1024,00                  | 9216,00                  | 0,00             | 15,50            |
| 10     | 102,00                     | 17,00          | 6,00              | 306,00                   | 2456,50                  | 0,00             | 12,00            |
| 11     | 132,00                     | 22,00          | 6,00              | 396,00                   | 5324,00                  | 0,00             | 0,00             |
| 12     | 118,80                     | 11,00          | 10,80             | 1154,70                  | 1197,90                  | 0,00             | 9,00             |
| 13     | 65,00                      | 13,00          | 5,00              | 135,42                   | 915,42                   | 0,00             | -10,00           |
| 14     | 117,00                     | 13,00          | 9,00              | 789,75                   | 1647,80                  | 0,00             | -10,00           |
| 15     | 312,00                     | 24,00          | 13,00             | 4394,00                  | 14976,00                 | 0,00             | -2,00            |
| 16     | 120,00                     | 24,00          | 5,00              | 250,00                   | 5760,00                  | -6,00            | 0,00             |
| 17     | 224,00                     | 32,00          | 7,00              | 914,67                   | 19115,00                 | -7,00            | 0,00             |
| 18     | 36,00                      | 9,00           | 4,00              | 48,00                    | 243,00                   | -5,50            | 0,00             |
| 19     | 90,00                      | 7,50           | 12,00             | 1080,00                  | 421,88                   | 0,00             | -7,25            |
| 20     | 160,00                     | 16,00          | 10,00             | 1333,30                  | 3413,30                  | 0,00             | -11,50           |
| 21     | 224,00                     | 16,00          | 14,00             | 3658,70                  | 4778,70                  | 0,00             | -11,50           |
| 22     | 80,00                      | 16,00          | 5,00              | 166,67                   | 1706,70                  | 0,00             | -11,50           |
| 23     | 25,00                      | 5,00           | 5,00              | 52,08                    | 52,08                    | 0,00             | -6,00            |
| 24     | 144,00                     | 16,00          | 9,00              | 972,00                   | 3072,00                  | -8,00            | 0,00             |
| 25     | 49,50                      | 9,00           | 5,50              | 124,78                   | 334,12                   | -6,25            | 0,00             |
| 26     | 110,00                     | 20,00          | 5,50              | 277,30                   | 3666,70                  | -6,25            | 0,00             |
| 29     | 32,00                      | 8,00           | 4,00              | 171,00                   | 42,70                    | 0,00             | -7,00            |
| 30     | 32,00                      | 4,00           | 8,00              | 42,70                    | 171,00                   | -7,00            | 0,00             |

Obs: A numeração de identificação segue a numeração do arquivo de comandos usado no ANSYS.



Partindo-se do modelo apresentado na Fig. 5.5, a análise modal realizada através do programa ANSYS V. 5.4, usando o algoritmo de extração de Block Lanczos e condições de contorno livre-livre, produziu um total de 50 modos de vibração na faixa de 0 a 5.000 Hz, excluídos os modos de corpo rígido. As Fig. 5.6 a 5.15 mostram as formas modais relativas aos dez primeiros modos de vibração em quatro formas distintas de apresentação, ou seja, vista isométrica (1), frontal (2), de topo (3) e lateral (4), com o objetivo de permitir uma melhor visualização de cada uma destas formas modais.

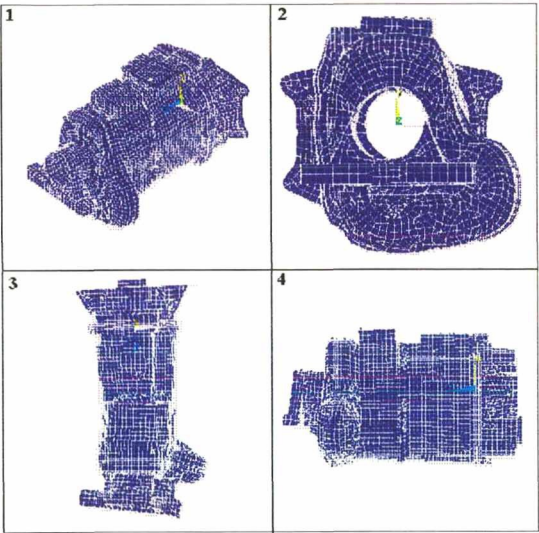


Figura 5.6 – Primeiro modo (1050,9 Hz).

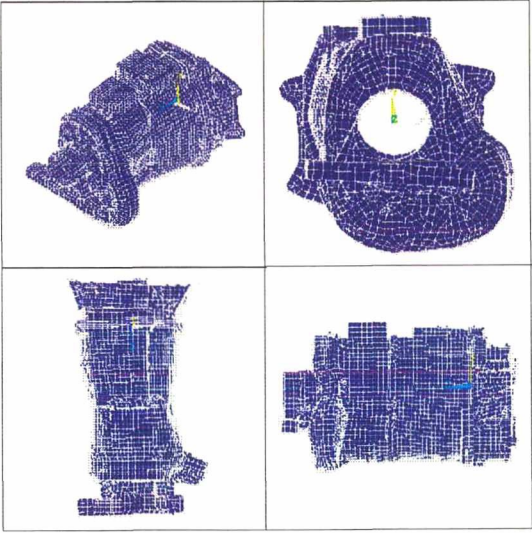


Figura 5.8 – Terceiro modo (1424,9 Hz).

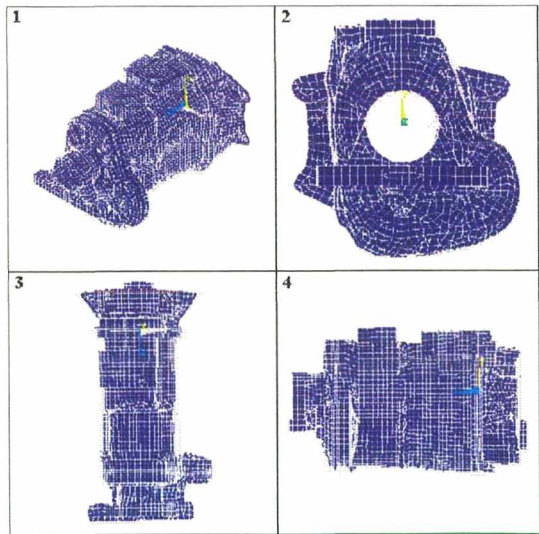


Figura 5.7 – Segundo modo (1324,9 Hz).

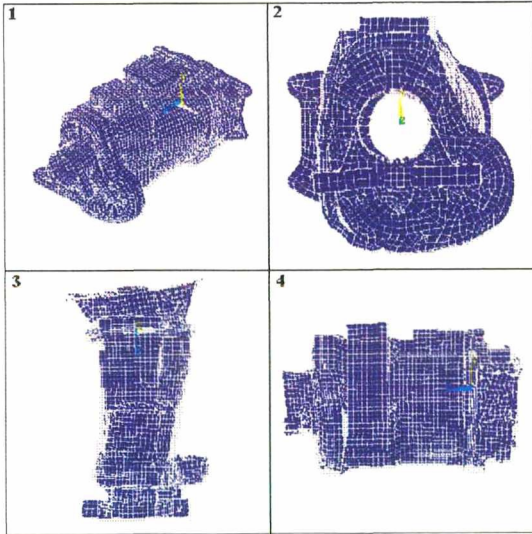


Figura 5.9 – Quarto modo (1541,30 Hz).

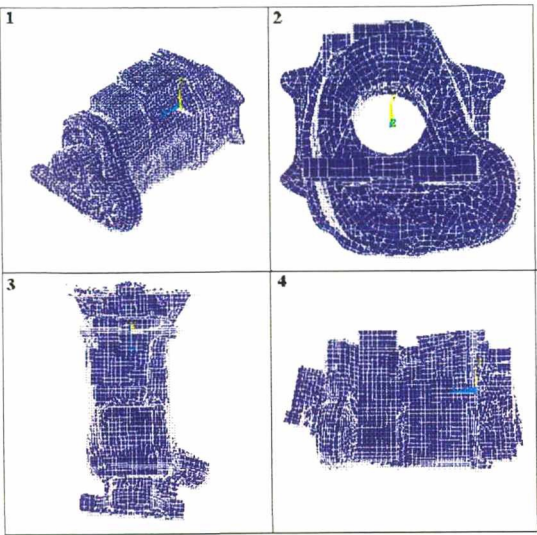


Figura 5.10 – Quinto modo (1639,3 Hz).

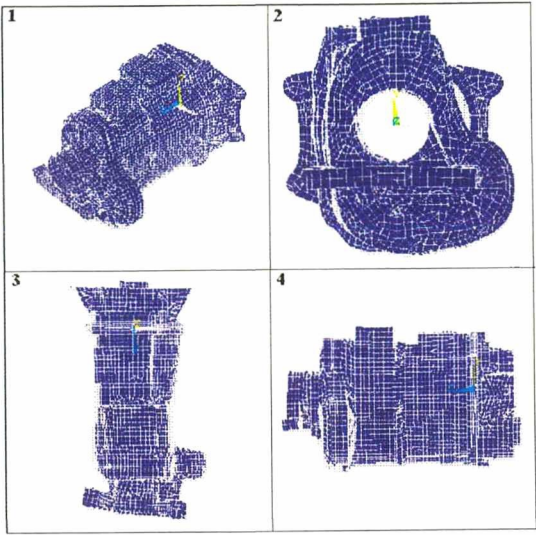


Figura 5.13 – Oitavo modo (1880,0 Hz).

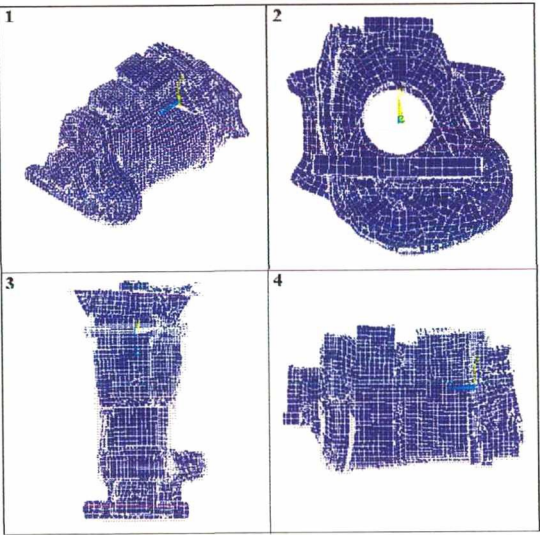


Figura 5.11 – Sexto modo (1725,3 Hz).

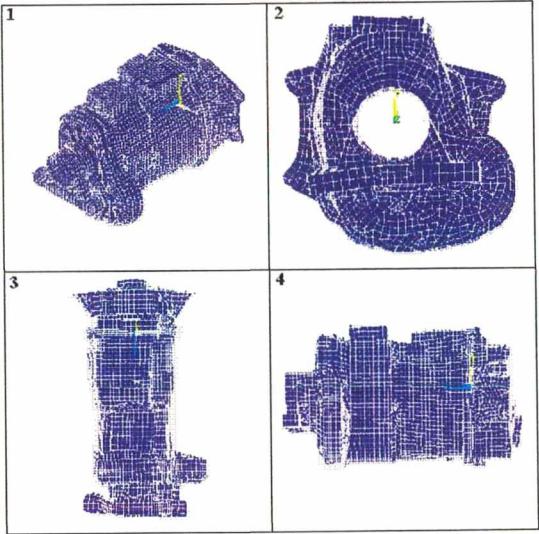


Figura 5.14 – Nono modo (1968,5 Hz).

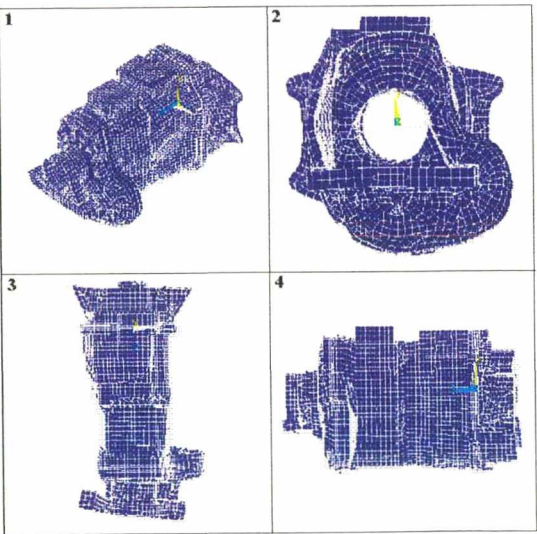


Figura 5.12 – Sétimo modo (1861,7 Hz).

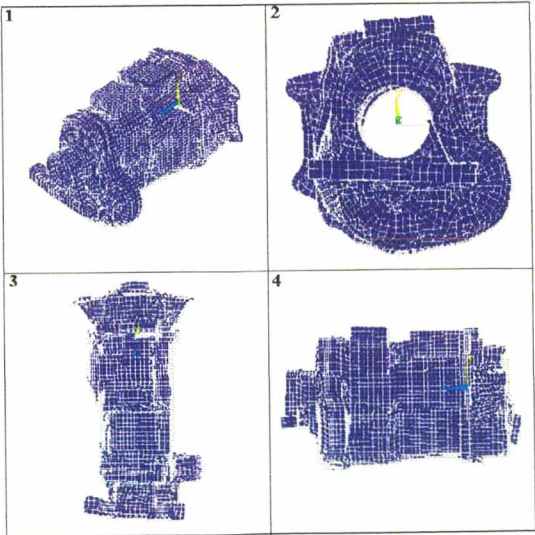


Figura 5.15 – Décimo modo (2042,0 Hz).



## 5.4 – ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL

A análise modal experimental é definida como o procedimento de extração de parâmetros e formas modais a partir de funções resposta em frequência medidas de uma estrutura. Os parâmetros modais incluem as frequências de ressonâncias na faixa de frequência de interesse, os fatores de amortecimento correspondentes e as massas modais para modos reais ou os resíduos complexos para modos complexos.

Uma boa razão para a realização de uma análise modal experimental é a validação de um modelo matemático pois, através desta análise, é possível a determinação das frequências naturais de uma estrutura e suas formas modais, criando-se as condições necessárias para o estabelecimento de uma comparação com as previsões feitas a partir do modelo matemático que se quer validar.

A primeira etapa da análise modal experimental é a medição de um conjunto de funções resposta em frequência (FRF). Posteriormente define-se um modelo modal viscoso ou histerético para descrever estes dados e, então, as técnicas de estimativa de parâmetros (ajuste de curvas) são usadas para ajustar este modelo com os dados medidos, e assim chegar aos valores dos parâmetros modais. Uma vez que os valores dos parâmetros tenham sido estimados, podem ser verificados através de visualização gráfica ou através do uso de técnicas de validação do modelo modal. A Fig. 5.16 mostra um esquema que resume o procedimento em que a excitação é feita por meio de *Shaker* e o ajuste no domínio da frequência.

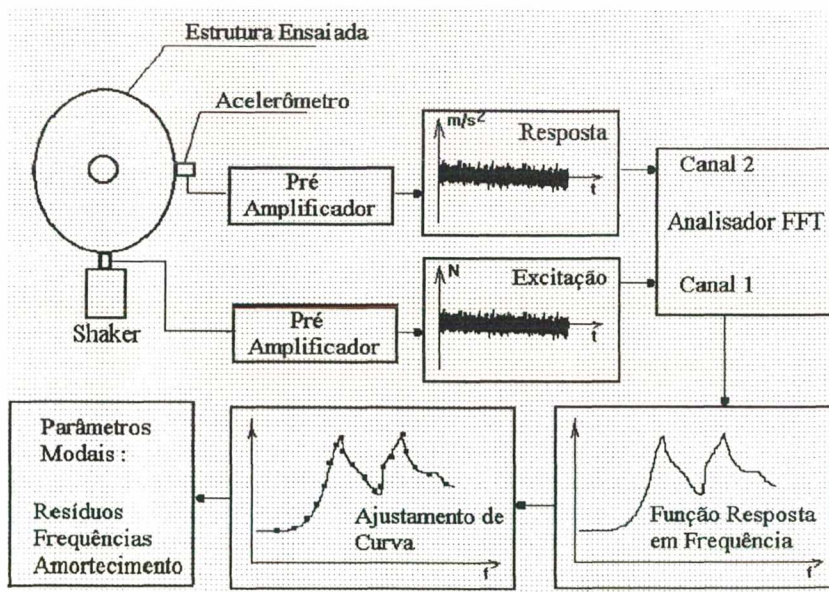


Figura 5.16 - Análise modal com excitador eletrodinâmico (*Shaker*).

### 5.4.1 – Base Teórica da Análise Modal Experimental

Uma abordagem teórica desenvolvida por Klosterman [42] é aqui apresentada. Nesta abordagem, o modelo de amortecimento usado é do tipo viscoso e a teoria da análise modal via funções resposta em frequência experimentais é examinada partindo-se da equação matricial de movimento para sistemas com  $N$  graus de liberdade, a qual é aqui reproduzida por conveniência:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (5.4)$$

A Eq. (5.4) é inconveniente de ser manuseada com os métodos padrão de extração de autovalores se a matriz de amortecimento  $\mathbf{C}$  não é proporcional à matriz de massa  $\mathbf{M}$  e/ou à matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ . Duncan [20] combinou a seguinte identidade :

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (5.5)$$

com a Eq. (5.4) para reduzi-las à forma:

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{g} \quad (5.6)$$

onde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{g} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F} \end{Bmatrix}$$

Partindo-se da hipótese de movimento harmônico é possível a manipulação da Eq. (5.6) para estabelecer a seguinte equação, com base no determinante formado pelas matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ :

$$|\mathbf{B} + \lambda\mathbf{A}| = 0 \quad (5.7)$$

que leva a um conjunto de  $2N$  raízes ou autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ , que satisfazem a Eq. (5.7). A cada um destes autovalores corresponde um autovetor  $\psi$ , com  $2N$  componentes, que satisfaz a seguinte equação:

$$(\mathbf{B} + \lambda_r\mathbf{A})\psi^T = \mathbf{0} \quad (5.8)$$

A função resposta em frequência  $H_{ik}$ , devido a uma excitação aplicada na posição  $k$  e resposta medida na posição  $i$ , pode ser escrita como:

$$H_{ik} = \frac{y_i}{g_k} = \sum_{r=1}^{2N} \frac{\psi_i^r \psi_k^r}{a_r(j\Omega - \lambda_r)} \quad (5.9)$$

A Eq. (5.9) pode também ser escrita como:

$$H_{ik} = \sum_{r=1}^{2N} \frac{A_{ik}^r}{j\Omega - \lambda_r} \quad (5.10)$$

onde:

$$\lambda_r = -\zeta_r \omega_r \pm j\omega_r \sqrt{1 - \zeta_r^2}$$

$\zeta_r$  = fator de amortecimento modal

$\omega_r$  = frequência natural não amortecida

$$A_{ik}^r = \text{resíduo no polo } \lambda_r = -\frac{\psi_i^r \psi_k^r \omega_r^2}{a_r} \quad (\text{se } H_{ik} \text{ é uma FRF do tipo inércia, ou seja}$$

aceleração/força).

$$a_r = (\psi^r)^T \cdot \mathbf{A} \cdot \psi^r$$

Na estimativa dos parâmetros modais, a partir de funções resposta em frequência experimentais, o procedimento de ajuste de curva de múltiplos graus de liberdade (MDOF) é normalmente usado, uma vez que na grande maioria dos sistemas reais os modos adjacentes interferem uns sobre os outros. Este procedimento fornece os valores de  $A_{ik}^r$ ,  $a_r$ ,  $\omega_r$ ,  $\psi^r$  e  $\zeta_r$  necessários para representar o modelo modal da estrutura quando os modos são complexos. Para uma descrição de modos reais, a Eq. (5.9) é modificada para:

$$H_{ik} = \sum_{r=1}^N \frac{\psi_i^r \psi_k^r}{m_r(\omega_r^2 - \Omega^2 + 2j\zeta_r \omega_r \Omega)} \quad (5.11)$$



Na Eq. (5.11), a magnitude dos coeficientes das formas modais é igual a magnitude do valor da forma modal complexa sendo que o sinal é assumido ser igual ao sinal da parte imaginária do coeficiente da forma modal para uma FRF do tipo inertância e, neste caso, o valor da massa efetiva  $m_r$  é determinado pela seguinte expressão:

$$m_r = \frac{\psi_i^r \psi_k^r \omega_r}{2|A_{ik}^r|} \quad (5.12)$$

Na análise de um sistema real, a faixa de frequência é geralmente limitada e se torna necessário assumir correções devido aos efeitos dos modos abaixo e acima da faixa de frequência de interesse. Assim, a Eq. (5.9) pode ser escrita como:

$$H_{ik} = \frac{X_{ik}}{\omega^2} + \sum_{r=1}^{2N} \frac{\psi_i^r \psi_k^r}{a_r(j\omega - s_r)} + Z_{ik} \quad (5.13)$$

onde  $X_{ik}$  (massa residual) e  $Z_{ik}$  (rigidez residual) são, respectivamente, os resíduos abaixo e acima da faixa de frequência de interesse. Estas correções são geradas comparando as FRF analítica e experimental.

#### 5.4.2 – Análise Modal Experimental do Alojamento

Antes dos dados experimentais serem obtidos, a geometria da estrutura deve ser definida. Esta geometria inclui os pontos geométricos posicionados sobre a superfície da estrutura tal que as FRF possam ser medidas nestes pontos e identificadas. Os pontos geométricos devem ser escolhidos de modo a possibilitar uma boa representação da estrutura para a faixa de frequência de interesse [47]. Isto significa que para cada modo de interesse, os pontos geométricos devem ser escolhidos tal que nem todos coincidam com posições correspondentes a pontos nodais (pontos em que o deslocamento é nulo) para aquele modo.

Na análise modal efetuada para o alojamento da caixa de engrenagem, a geometria do alojamento foi representada por um conjunto de 301 pontos distribuídos sobre sua superfície, o que deu origem à malha experimental mostrada na Fig. 5. 17. Um *Shaker* alimentado por ruído branco excitou a estrutura do alojamento e as FRF do tipo inertância foram obtidas, em cada um

dos nó da malha experimental, usando-se uma contagem de 180 espectros no processo de média. A Fig. 5.18 mostra o arranjo experimental constituído de um acelerômetro piezoelétrico B&K tipo 4375, transdutor de força B&K tipo 8200, shaker B&K tipo 4808, amplificador de carga B&K tipo 2635, amplificador condicionador B&K tipo 2626, amplificador de potência B&K tipo 2712, gerador de ruído/seno B&K tipo 1049, analisador FFT de quatro canais, marca TEKTRONIX 2630, com filtro *anti-aliasing* incorporado e um micro computador 486 com 16 Mb de RAM.

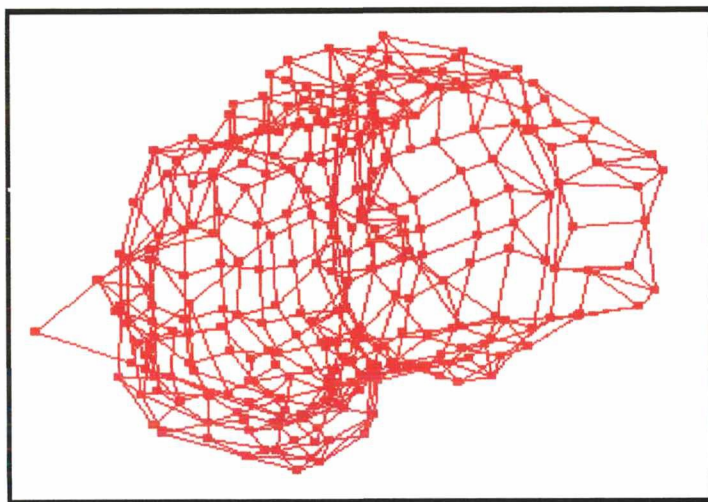


Figura 5.17 – Malha experimental de pontos para medição das FRF.

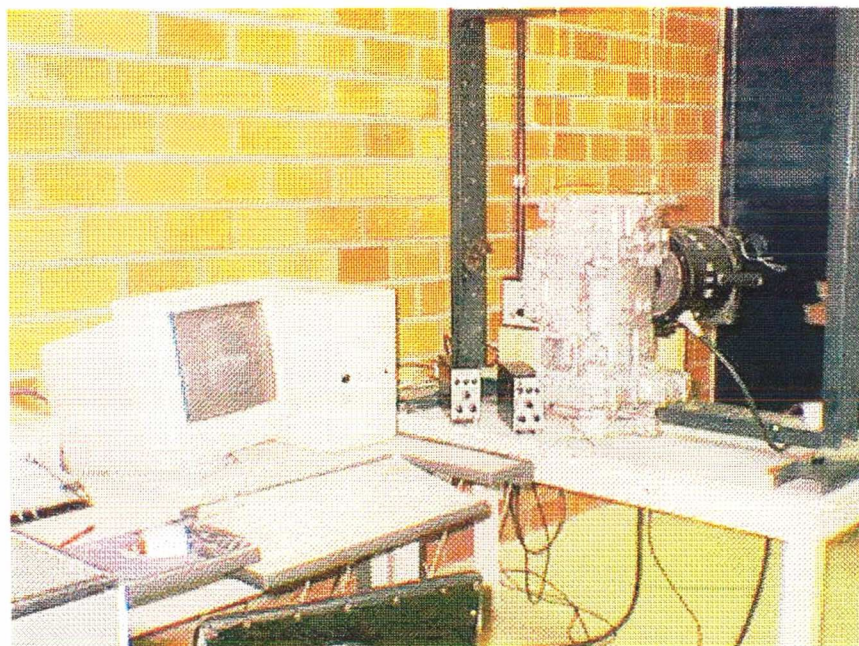


Figura 5.18 – Alojamento e equipamentos usados no experimento.



A calibração dos transdutores de força e movimento foi realizada segundo o procedimento apresentado por Ewins [21]. Neste procedimento, os transdutores de carga e de movimento são calibrados simultaneamente, em toda a faixa de frequência de interesse, o que permite uma calibração de toda a cadeia de medição e elimina as incertezas no fator de calibração individual dos transdutores. A montagem experimental para a calibração simultânea dos transdutores é mostrada na Fig. 5.19. Uma massa conhecida é usada neste processo e o fator de calibração é obtido a partir do valor da massa conhecida e da curva medida, a qual registra a relação aceleração/força.

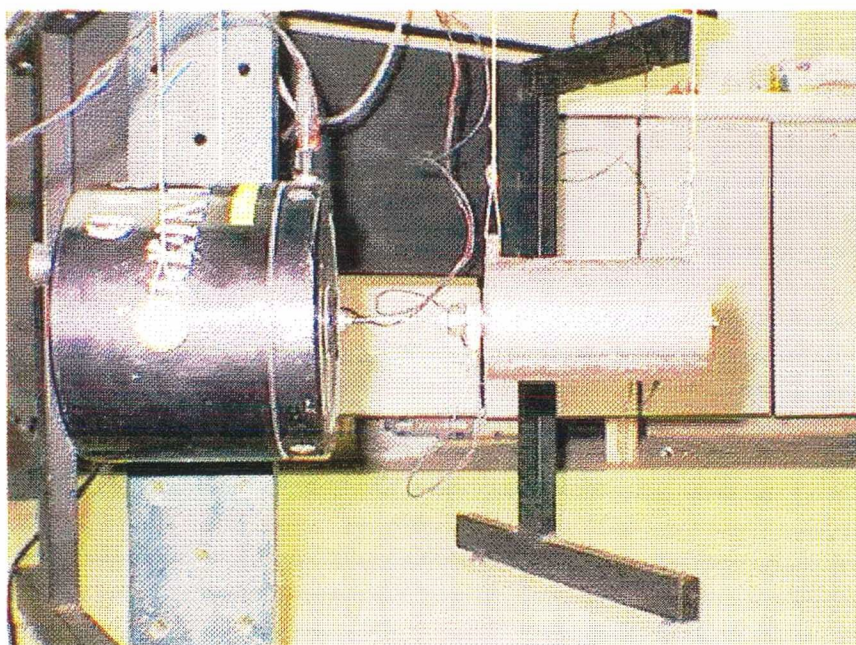


Figura 5.19 – Montagem para a calibração simultânea dos transdutores.

A Fig. 5.20 mostra uma FRF do tipo inércia típica. Nesta figura, a escala de frequência é linear e a FRF é apresentada através de sua magnitude e fase. Portanto, usando o conjunto das FRF obtidas, para cada um dos pontos da malha experimental, o passo seguinte é a identificação dos parâmetros modais. Com este objetivo, o programa LMS CADA-PC R.1.2 foi usado. Este programa usa a versão de mínimos quadrados do algoritmo de Exponenciais Complexas, conhecida como LSCE (*Least Squares Complex Exponential*), que é uma técnica MDOF no regime do tempo para a estimativa dos pólos ( $s_r$ ) e resíduos ( $A^T$ ) associados a cada modo de vibração, e a técnica LSFD (*Least Squares Frequency Domain*) para a estimativa dos resíduos abaixo (massa residual) e acima (rigidez residual) da faixa de frequência de interesse. No artigo de Brown et al [7] uma boa descrição teórica destes métodos pode ser encontrada.

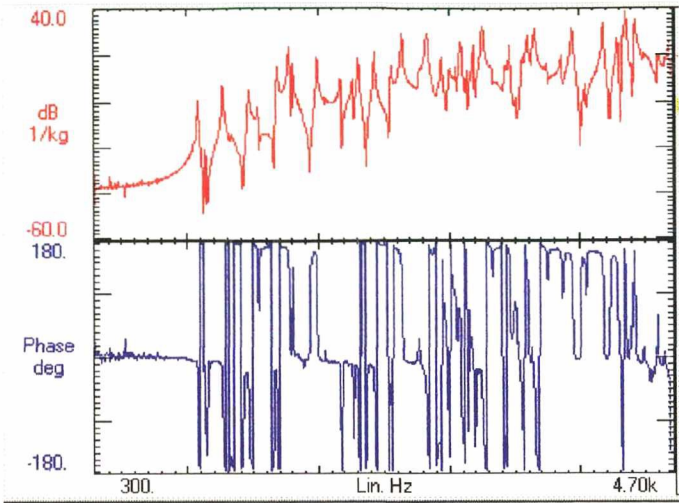


Figura 5.20 – FRF do tipo inércia típica para a posição 143 do alojamento.

Um bom auxílio na estimativa dos parâmetros modais é a obtenção da Função Indicadora de Modos (MIF – *Mode Indicator Function*), a qual permite perceber a presença de modos de vibração em cada frequência. No LMS CADA-PC R. 1.2, a MIF se baseia na hipótese de que na ressonância a energia vibratória está em quadratura ( $90^\circ$  fora de fase) com a excitação. Ela expressa a relação entre a quantidade de energia em fase e a quantidade de energia vibratória total para cada frequência. Assim, a MIF mostra um valor mínimo para cada ressonância como mostra a Fig. 5.21. Ainda nesta figura, é mostrada uma curva puramente real, para a qual os pares ordenados são obtidos fixando-se o valor da frequência como abscissa e as ordenadas determinadas como o valor médio (média aritmética) das amplitudes de todas as FRF medidas. Portanto, o cruzamento das informações destas duas curvas permitem uma indicação segura da presença de um modo de vibração e orienta o processo de estimativa dos parâmetros modais.

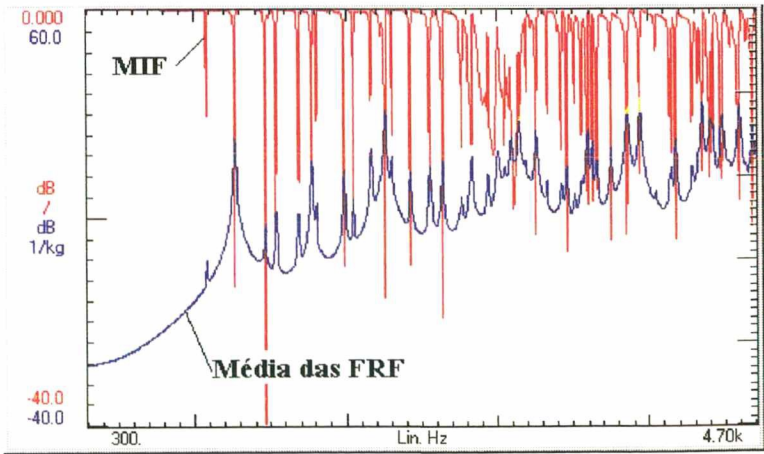


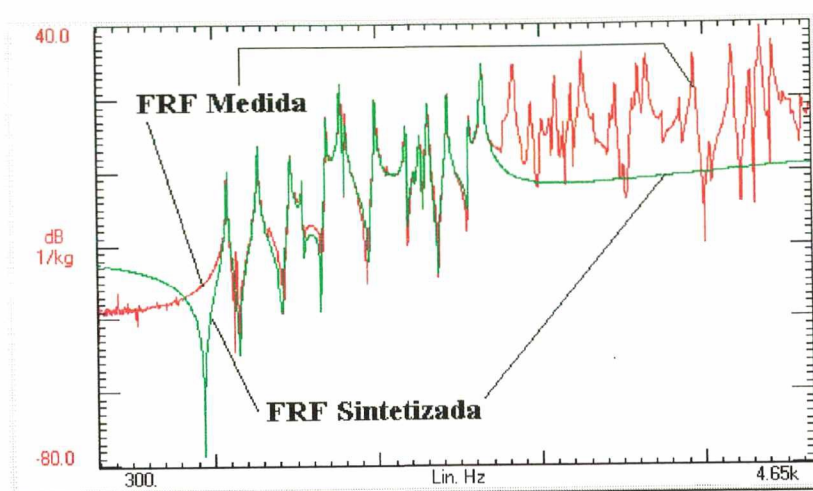
Figura 5.21 – Função indicadora de modos (MIF) e a média das FRF medidas.



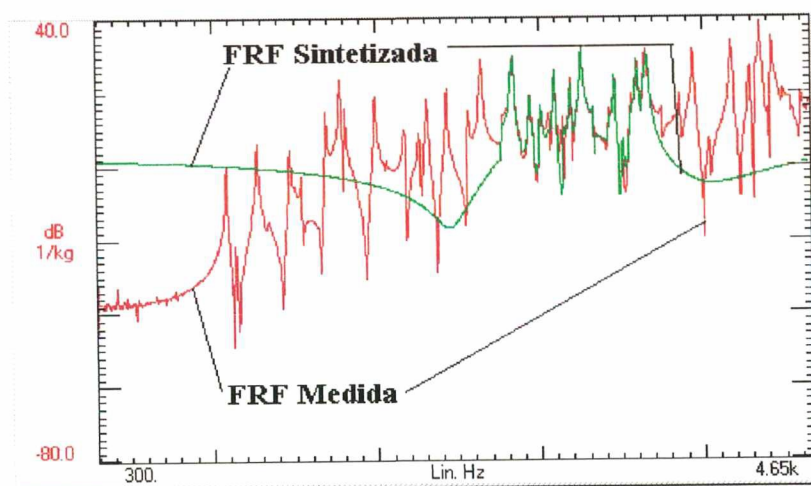
A extração dos parâmetros modais a partir das FRF medidas se faz por etapas, com a utilização do processo de ajuste de curvas no domínio do tempo (algoritmo LSCE). Para tal, seleciona-se uma banda de frequência com a presença de alguns modos de vibração e à medida que se obtêm os parâmetros modais relativos a esta banda de frequência, uma nova banda é selecionada até que se tenha varrido toda a faixa de frequência de interesse. Uma boa indicação da qualidade do ajuste de curvas realizado pode ser obtida através da superposição da FRF medida e da FRF gerada a partir da Eq. (5.13) (FRF sintetizada), tendo por base os parâmetros modais extraídos através do procedimento de análise. As Fig. 5.22 (a), (b) e (c) mostram a qualidade deste processo numérico de ajuste.

Freqüentemente, o comportamento dinâmico de uma estrutura é descrito em termos de modos complexos de vibração e, por este motivo, a análise modal foi realizada partindo desta hipótese. Assim, é desejável avaliar a complexidade de cada um dos modos. Imregun e Ewins [33], em um artigo muito interessante sobre este tema, apresentam algumas maneiras de se quantificar o grau de complexidade das formas modais que estão implementadas no programa MODESH V. 6.7A, desenvolvido pelo *Imperial College Analysis, Testing and Software – ICATS*. Neste aplicativo, os elementos do autovetor (formas modais) são desenhados como segmentos de retas em que os comprimentos são dados pelas magnitudes dos elementos do autovetor e as direções são dadas pelas respectivas fases. Os modos reais ou de baixo grau de complexidade são aqueles em que os segmentos de retas tendem a se agrupar em uma linha reta enquanto que os modos complexos apresentam um padrão aleatório de distribuição destes segmentos de reta. O programa permite, ainda, a determinação de três fatores de complexidade modal distintos que são muito úteis para o propósito de comparação são eles: fator de complexidade modal de fase (MFC1), fator de complexidade modal de amplitude ponderada (MFC2) e o fator de complexidade modal de fase ponderada pela amplitude (MFC3) [59].

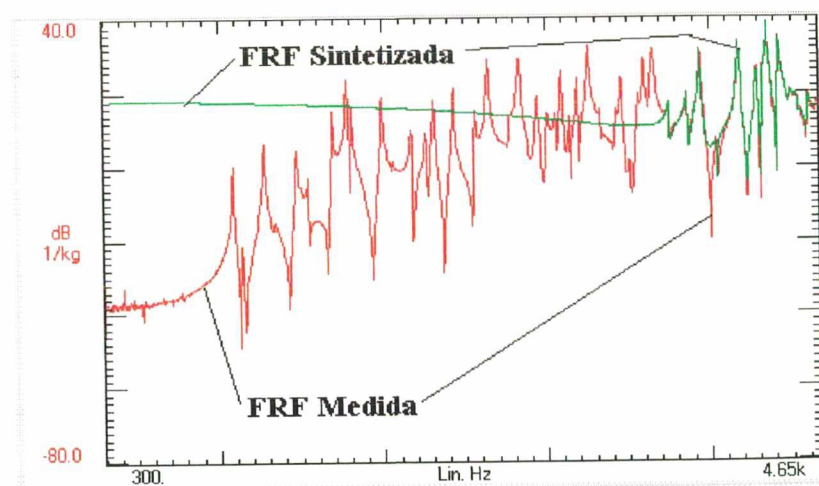
As Fig. 5.23 a 5.26 apresentam os diagramas de complexidade modal para os 40 primeiros modos, de um total de 48, que foram extraídos das FRF medidas. Como pode ser observado nestas figuras, somente os primeiros modos aproximam-se de modos reais. Isto pode ser explicado pelo fato do alojamento apresentar amortecimento não proporcional e possíveis efeitos de não linearidade, principalmente, devido às junções parafusadas das tampas dianteira e traseira que apresentam uma influência maior nas frequências em que o comprimento de onda é menor ou da mesma magnitude do que a distância entre os parafusos. Os valores de amortecimento que aparecem nas Fig. 5.23 a 5.26 são valores de amortecimento estrutural ( $\eta$ ) que equivale ao dobro do fator de amortecimento ( $\zeta$ ) obtido na análise modal.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.22 – Sobreposição de FRF medida e sintetizada em três trechos consecutivos.

(a) 1.05 kHz – 2.70 kHz. (b) 2.70 kHz – 3.68 kHz. (c) 3.68 kHz – 4.65 kHz.



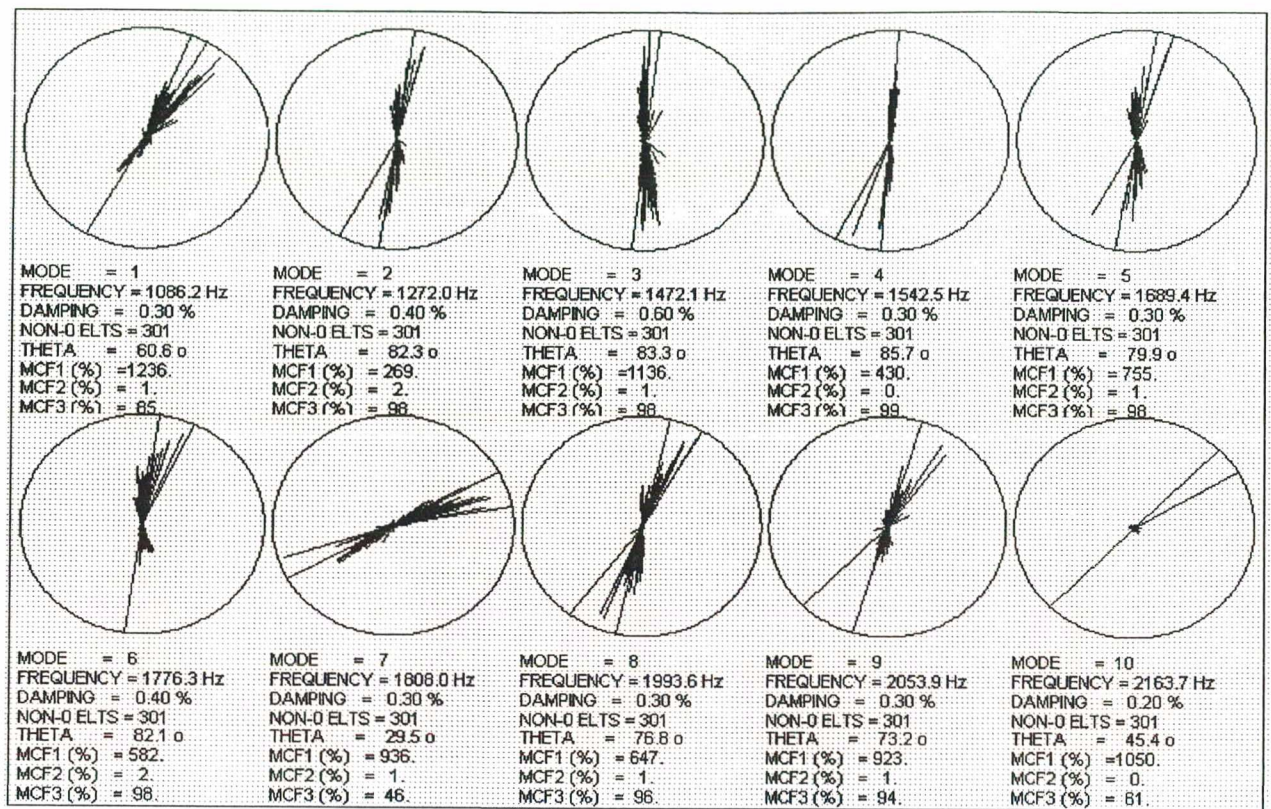


Figura 5.23 – Diagrama de complexidade para os modos de vibração de 1 a 10 do alojamento.

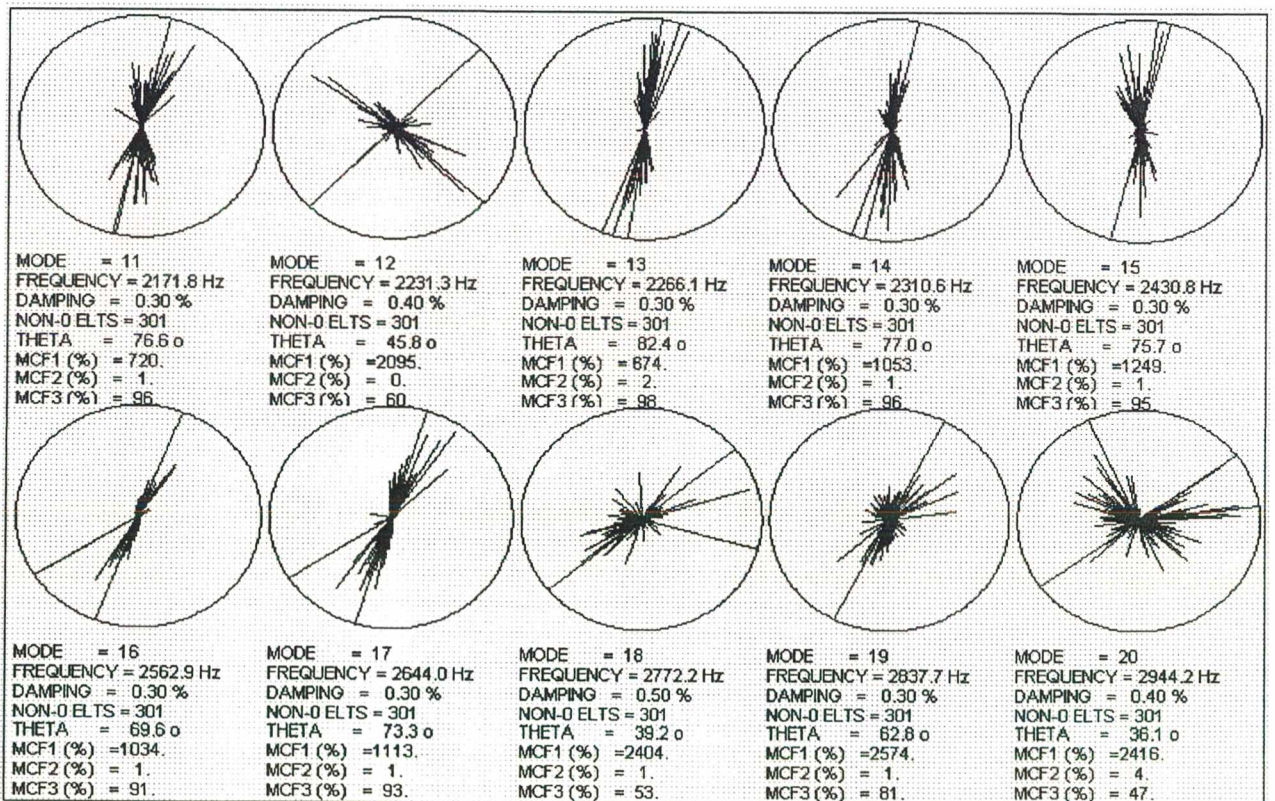


Figura 5.24 – Diagrama de complexidade para os modos de vibração de 11 a 20 do alojamento.



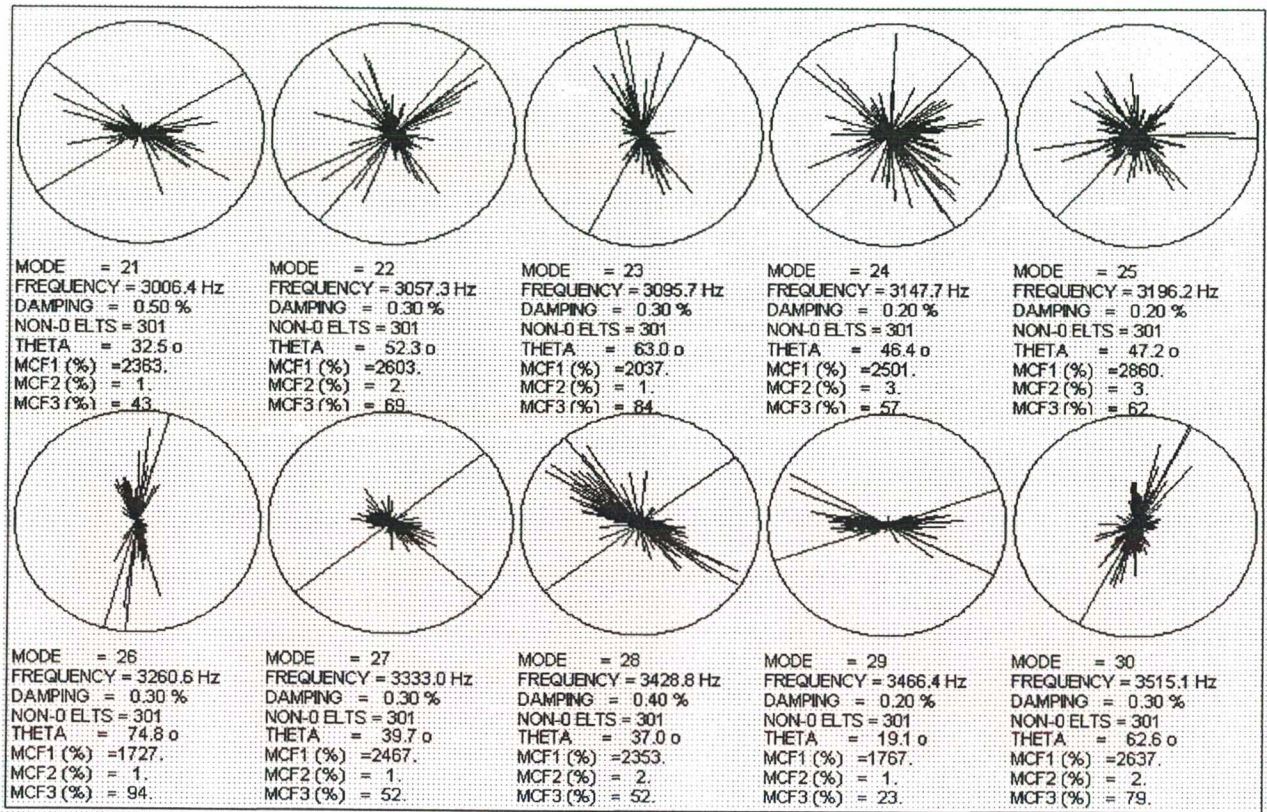


Figura 5.25 – Diagrama de complexidade para os modos de vibração de 21 a 30 do alojamento.

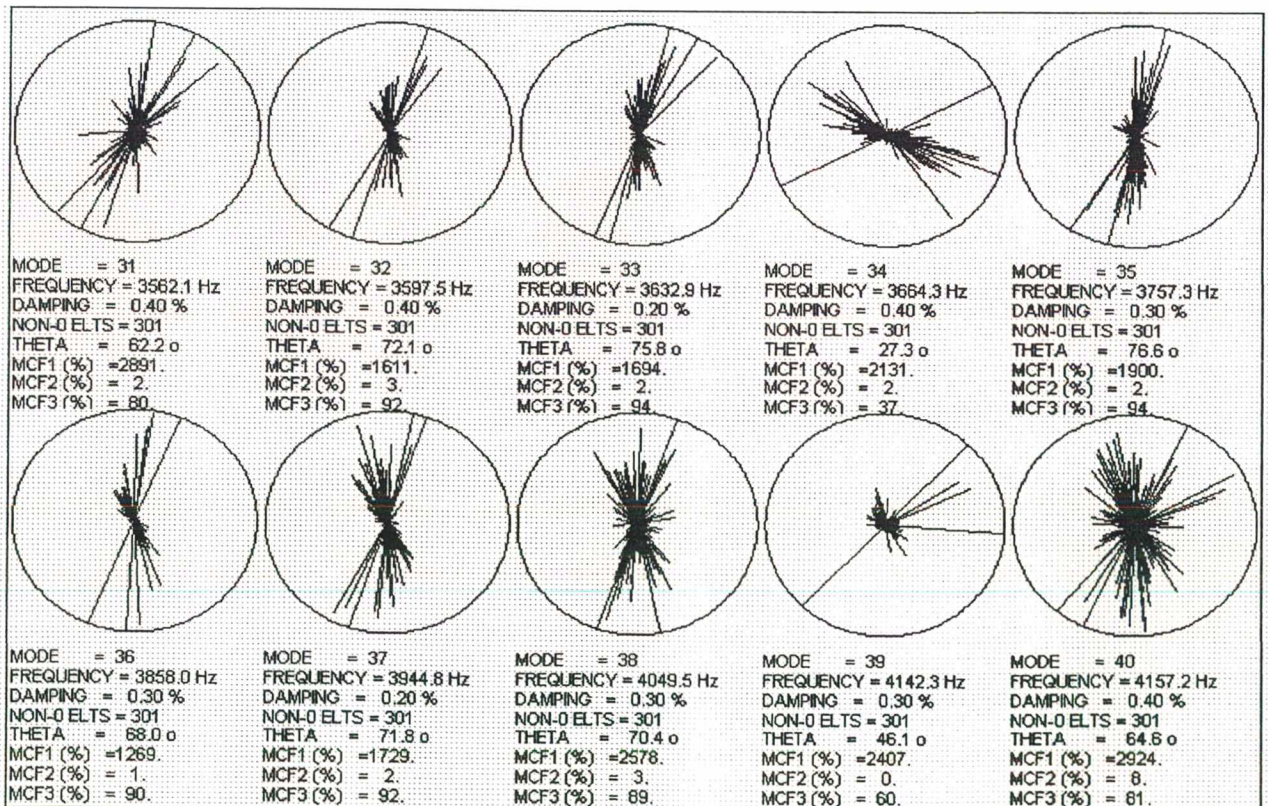


Figura 5.26 – Diagrama de complexidade para os modos de vibração de 31 a 40 do alojamento.



### 5.5 – COMPARAÇÃO DOS MODELOS NUMÉRICO E EXPERIMENTAL

A análise modal numérica determina um modelo modal da estrutura em que as formas modais são reais e não complexas, uma vez que na solução do problema de autovalor e autovetor nenhuma propriedade de amortecimento é considerada. A não incorporação de amortecimento se explica em virtude de que na análise de vibrações forçadas a matriz de amortecimento é assumida ser proporcional e, quando isto ocorre, as formas modais do modelo sem amortecimento são as mesmas do modelo amortecido. Assim, a comparação dos dados numéricos é feita usando os dados experimentais obtidos através de uma análise que assume os modos reais ou pelo processo de transformação de modos complexos em modos reais e, neste caso, os artigos de Ibrahim [30] e Niedbal [65] são de grande utilidade.

A comparação aqui apresentada usa os dados experimentais obtidos da análise modal, desenvolvida no LMS CADA-PC R.1.2, tendo por base a representação analítica da FRF dada pela Eq. (5.11), a qual é baseada na hipótese de modos reais. Portanto, partindo-se dos dados referentes aos modelos numérico e experimental é possível estabelecer uma primeira comparação, conforme mostrado na Fig. 5.27. Nesta figura, em cada um dos eixos ordenados estão posicionados os valores das frequências naturais obtidas pelos dois modelos e o que se espera, para uma concordância integral entre os modelos, é que a reta resultante apresente um coeficiente angular igual a 1 (correspondente a 45 graus de inclinação), o que aqui não ocorre. Entretanto, conforme observado na Fig. 5.27, o desvio apresentado pela reta é pequeno em relação ao valor de 45 graus, o que atesta uma boa concordância entre os modelos.

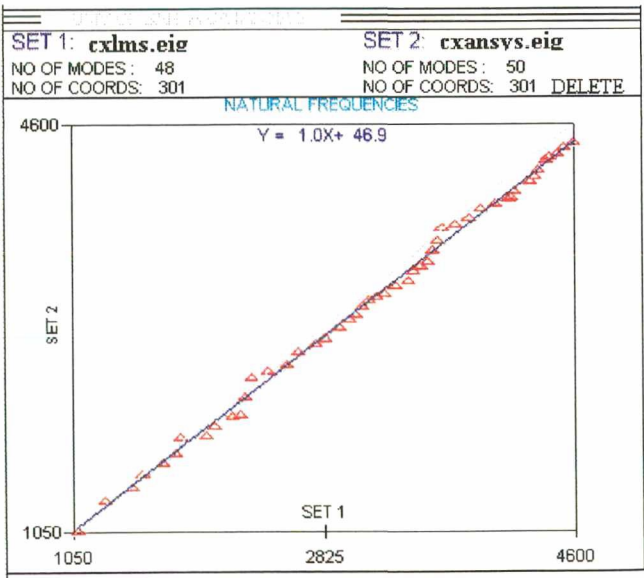


Figura 5.27 – Comparação entre frequências naturais obtidas no MODESH V. 6.7A.

Uma comparação entre as formas modais, relativas aos dois primeiros modos de vibração do alojamento, é apresentada nas Fig. 5.28 e 5.29. Em cada uma destas figuras podem ser visualizadas as formas modais obtidas pelo ANSYS V. 5.4 e pela análise modal experimental. Para facilitar a comparação, as formas modais são apresentadas para as duas posições extremas de movimento, sendo que as configurações deformadas referentes aos dois primeiros modos de vibração obtidas pelo ANSYS V. 5.4, são também mostradas com base na malha reduzida (malha experimental). É possível perceber da observação destas figuras que existe uma boa concordância entre estas formas modais.

Outra possibilidade de comparação é feita através do método da matriz de erro modificada, tanto em relação à matriz de massa quanto à matriz de rigidez, que faz uso da técnica de decomposição em valores singulares, conforme metodologia apresentada no artigo de Lieven e Ewins [50]. Basicamente, as matrizes de erro de massa ( $E_m$ ) e de rigidez ( $E_k$ ) são definidas como:

$$E_m = M_{EF} - M_{Exp} \quad (5.14)$$

$$E_k = K_{EF} - K_{Exp} \quad (5.15)$$

onde  $M_{Exp}$  e  $K_{Exp}$  são, respectivamente, as matrizes de massa e rigidez experimentais, computadas a partir dos parâmetros modais identificados no LMS CADA R. 1.2 e  $M_{EF}$  e  $K_{EF}$  as respectivas matrizes de massa e rigidez montadas a partir dos dados obtidos pelo método de elementos finitos, mantendo-se os mesmos graus de liberdade usados no modelo experimental.

As Fig. 5.30 e 5.31 mostram o resultado da aplicação do método proposto por Lieven e Ewins [50], implementado no programa MODESH V. 6.7A, para os 160 primeiros nós do modelo experimental. Nas matrizes apresentadas nestas figuras, os graus de liberdade que apresentam os maiores erros, entre os resultados da análise modal experimental e numérica, podem ser identificados e usados, como ponto de partida, para as alterações da malha de elementos finitos, com o objetivo de melhorar os resultados numéricos obtidos se necessário. Portanto, como o erro computado para as matrizes de massa é bastante reduzido e somente um número reduzido de coeficientes da matriz de rigidez apresentam erro significativo, pode-se dizer que uma boa correlação existe entre os modelos experimental e numérico.

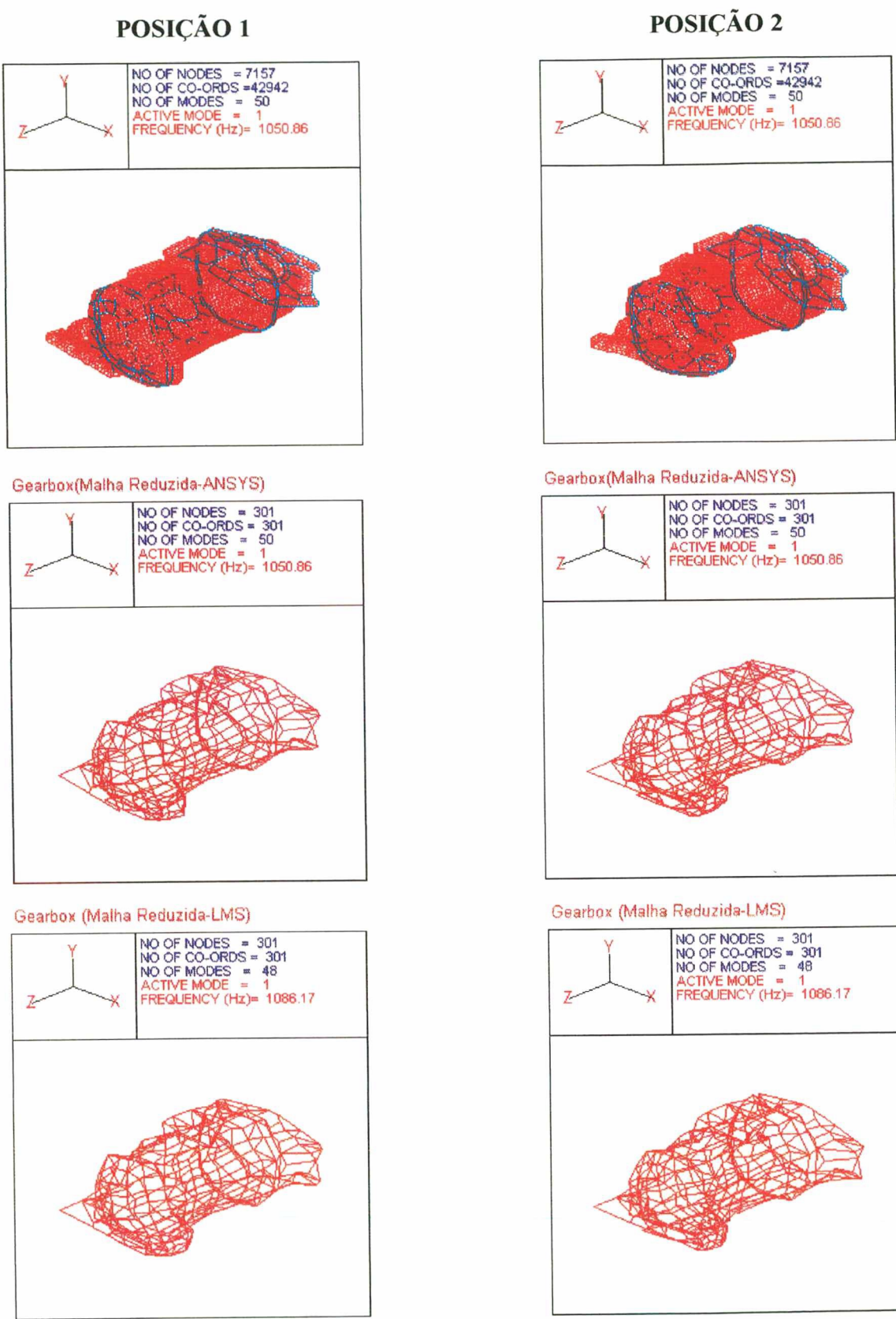


Figura 5.28 - Comparação das formas modais do primeiro modo de vibração.



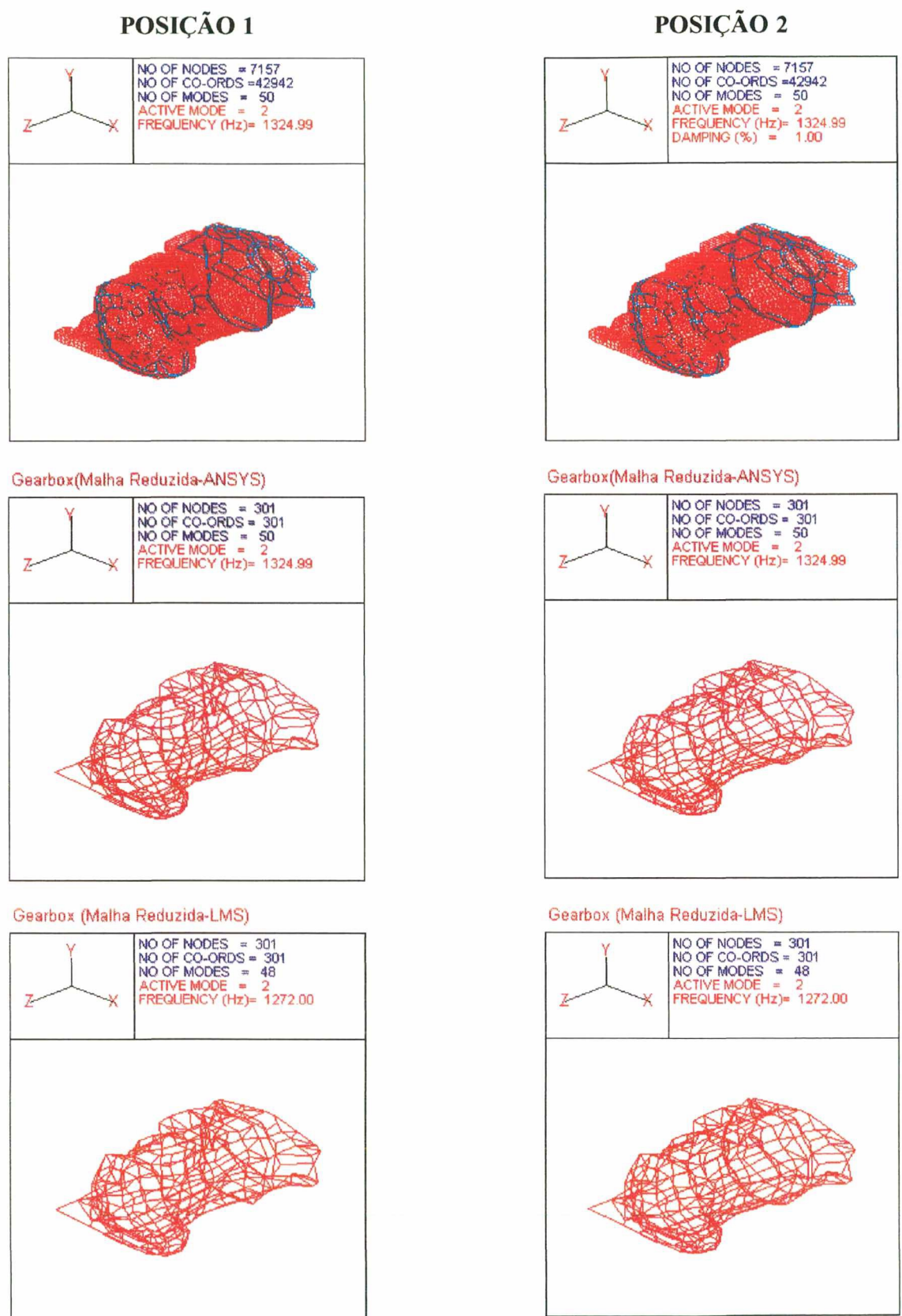


Figura 5.29 - Comparação das formas modais do segundo modo de vibração.



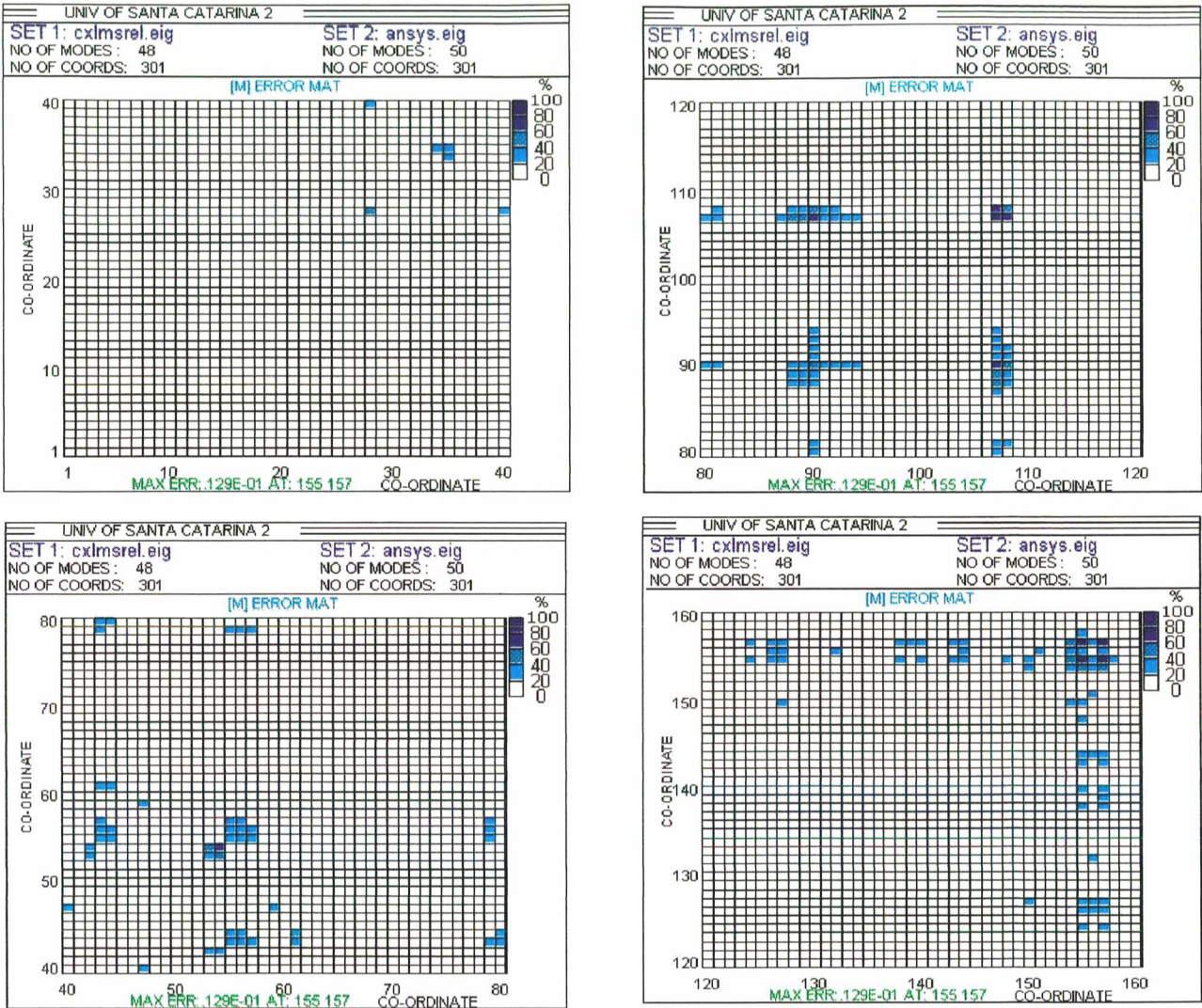


Figura 5.30 – Matriz erro de massa para as coordenadas de 1 a 160.

5.6 – COMENTÁRIOS FINAIS

Um malha de elementos finitos do alojamento da caixa de engrenagem, elaborada a partir de um método de estimativa do tamanho do elemento, baseado na teoria de placas finas, foi desenvolvida e usada para a determinação numérica das frequências naturais e formas modais definindo, assim, um modelo modal numérico do alojamento.

A discretização da geometria do alojamento por um conjunto de pontos foi feita e obteve-se um total de 301 FRF medidas, as quais foram usadas para a extração dos parâmetros modais e conseqüente definição do modelo modal experimental. Os dados do modelo experimental mostraram que os modos de vibração são complexos, uma vez que estruturas complexas como a



do alojamento geralmente apresentam amortecimento do tipo não proporcional e, devido a presença de juntas fixadas por parafuso, possíveis efeitos de não linearidade nas frequências mais altas.

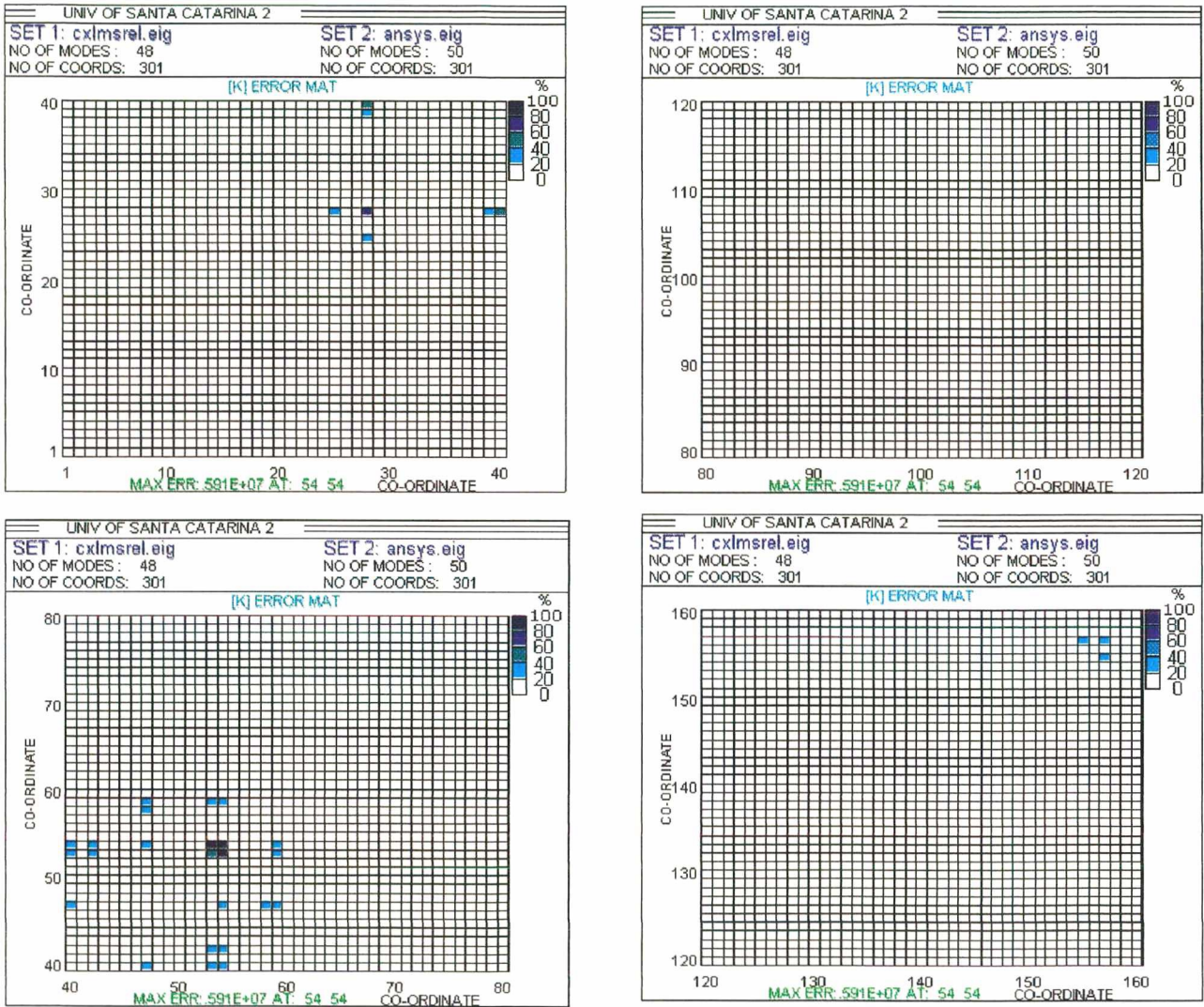


Figura 5.31 – Matriz erro de rigidez para as coordenadas de 1 a 160.

A comparação entre os modelos experimental e numérico foi feita a partir de parâmetros modais obtidos das FRF experimentais, com base na hipótese de modos reais, mostrando esta comparação que um pequeno desvio foi constatado nas frequências naturais, boa correlação entre as formas modais, pequenos desvios em uns poucos coeficientes da matriz erro de massa e desvios mais significativos em alguns coeficientes da matriz erro de rigidez. Por outro lado, é bom lembrar que o alojamento é uma estrutura fabricada em série e, assim sendo, é um fato bem conhecido na área de fabricação e produção de produtos que existe variância das características

vibro-acústicas de produtos fabricados em série [43]. Na prática, esta variância pode se manifestar através de diferenças de até 10 dB na amplitude e cerca de 10 % nos valores da frequências naturais. Assim, para as informações apresentadas neste capítulo é possível concluir que o modelo numérico apresenta uma boa concordância com o modelo experimental.



## CAPÍTULO 6

### RADIAÇÃO SONORA MODAL

#### 6.1 - INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, o comportamento de vibração estrutural e a radiação acústica a ele relacionado têm merecido muita atenção por parte dos engenheiros. Entretanto, estes problemas são de tratamento matemático analítico difícil, principalmente, quando estão relacionados a uma estrutura complexa, tal como ocorre quando se pretende modelar um alojamento de caixa de engrenagem de uso veicular.

Tradicionalmente, a capacidade de radiação sonora de uma estrutura é caracterizada pela eficiência de radiação acústica. Por outro lado, é um fato conhecido, através da literatura disponível na área de acústica, que a radiação sonora de um corpo elástico, vibrando em regime permanente, está relacionada à distribuição da velocidade de vibração na direção normal da superfície do corpo, sua forma geométrica superficial e do meio ambiente. Assim, existe uma relação entre vibração e som radiado, isto é, a vibração de uma estrutura induz radiação sonora e vice-versa.

As propriedades de vibração de uma estrutura são caracterizadas pelos modos de vibração estrutural. Sob certas circunstâncias, a estrutura vibrará segundo uma forma deformada, denominada de forma modal, que não está relacionada a qualquer fator externo e pode refletir as propriedades físicas inerentes à estrutura vibrante. Portanto, devido à relação existente entre vibração estrutural e radiação sonora, podemos deduzir que existirá uma forma de distribuição de radiação sonora associada com a forma modal de vibração, de tal modo que aquela forma de distribuição está relacionada às características físicas inerentes da estrutura e, assim sendo, fornecerá uma eficiência de radiação modal.

Neste capítulo, são descritos os procedimentos para a simulação do comportamento vibro-acústico modal de estruturas através dos métodos de elementos finitos e elementos de contorno. Os resultados computacionais aqui apresentados dizem respeito à modelagem de uma placa plana simplesmente apoiada e do alojamento da caixa de engrenagem, cujo modelo de elementos finitos foi apresentado no Capítulo 5. A validação do procedimento usado é feita através da comparação dos resultados numéricos, obtidos pelos programas comerciais ANSYS e SYSNOISE, com aqueles obtidos pela formulação analítica disponível para placas retangulares.

## 6.2 – FORMULAÇÃO TEÓRICA E PROCEDIMENTO DE CÁLCULO

A análise acústica pelo método de elementos de contorno é um procedimento de solução numérica baseado na solução de equações integrais obtidas a partir da aplicação do teorema da divergência ao produto interno da equação diferencial, que governa o problema, e a função de Green. Para o problema acústico, no domínio da frequência, esta equação diferencial é a equação escalar de Helmholtz, dada por [24]:

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0 \quad (6.1)$$

onde  $\nabla^2$  é o operador Laplaciano,  $p$  é a pressão acústica e  $k = \omega/c$  o número de onda acústica.

As possíveis condições de contorno utilizadas são as seguintes:

$$p = \bar{p} \quad \text{em } S_1 \quad (\text{condição de Dirichlet})$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -i \rho \omega \bar{v}_n \quad \text{em } S_2 \quad (\text{condição de Neumann}) \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -i \rho \omega A_n p \quad \text{em } S_3 \quad (\text{condição de Robin})$$

com  $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ , sendo  $\bar{p}$  a pressão sonora na superfície  $S_1$ ,  $\bar{v}_n$  a velocidade normal na superfície  $S_2$  e  $A_n$  a admitância normal na superfície  $S_3$ .

Em acústica, tanto a análise de elementos de contorno direta (aproximação colocacional) quanto a indireta (aproximação variacional) podem ser usadas [88]. As palavras direta/indireta referem-se a escolha da incógnita na superfície do modelo. O método direto usa a pressão e velocidade normal como variáveis de superfície enquanto o método indireto utiliza a descontinuidade de pressão e de velocidade normal através da superfície (diferença entre os dois lados de uma superfície). Estas duas formulações levam a equações integrais diferentes, para o campo de pressão, que são resolvidas usando técnicas diferentes. Por outro lado, as palavras colocacional / variacional referem-se à técnica de solução. Em uma técnica colocacional força-se a solução aproximada satisfazer a equação integral do contorno exata em um número finito de pontos sobre a superfície, enquanto que, na técnica variacional, a solução aproximada é obtida minimizando-se um funcional associado com a equação integral do contorno original. Nas



subseções seguintes, ambas as formulações são descritas, tendo por base o resumo extraído do artigo de Gardner et. al. [22].

### 6.2.1 – Método Direto (Aproximação Colocacional)

A equação integral associada a Eq. (6.1), para a pressão acústica em um ponto  $\mathbf{R}$  da superfície, é dada por:

$$C(\mathbf{R})p(\mathbf{R}) = \int_S \left[ G(\mathbf{R}', \mathbf{R}) \frac{\partial p(\mathbf{R}')}{\partial n(\mathbf{R}')} - \frac{\partial G(\mathbf{R}', \mathbf{R})}{\partial n(\mathbf{R}')} p(\mathbf{R}') \right] dS(\mathbf{R}') \quad (6.3)$$

onde  $S$  é a superfície do domínio acústico,  $p$  é a pressão acústica sobre a superfície,  $\partial\{.\}/\partial n(\mathbf{R}')$  é a derivada parcial de uma função em relação a normal para fora do domínio acústico em um ponto  $\mathbf{R}'$  da superfície,  $G$  é a função de Green e  $C$  é um termo que resulta do tratamento de uma integral singular envolvendo a derivada da função de Green. Na presente notação, um vetor posição, relativo a um ponto sobre a superfície do domínio acústico, será representado por uma letra maiúscula em negrito, por exemplo  $\mathbf{R}'$  e  $\mathbf{R}$ , e por uma letra minúscula em negrito para um ponto dentro do domínio acústico, como por exemplo  $\mathbf{r}$ .

A Eq. (6.3) pode ser discretizada, pela aproximação das variáveis de superfície  $p(\mathbf{R}')$  e  $\partial p(\mathbf{R}')/\partial n(\mathbf{R}')$ , em termos de funções de forma e dos valores das variáveis de superfície nos nós dos elementos. Assim, a equação integral é transformada em uma série de integrais nos elementos que, quando avaliadas, dão origem a uma equação em termos de variáveis nodais.

Na análise de elementos de contorno direta, a solução da integral da Eq. (6.3) é obtida gerando as integrais dos elementos para cada nó do contorno e, então, resolvendo o sistema de equações resultante. Este sistema de equações pode ser representado simbolicamente como:

$$\mathbf{F} \mathbf{p} = \mathbf{G} \mathbf{u} \quad (6.4)$$

onde  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{G}$  são matrizes cujos coeficientes são obtidos pela avaliação de integrandos envolvendo  $\partial G/\partial n$  e  $G$ ,  $\mathbf{p}$  é o vetor de pressão acústica nos nós da superfície e  $\mathbf{u}$  é o vetor de velocidade de partícula normal à superfície naqueles nós.

Conhecidas as condições de contorno, para cada posição sobre a superfície, o passo seguinte é a substituição destas condições de contorno na Eq. (6.4) e a equação matricial é

resolvida para fornecer as variáveis do contorno desconhecidas. Uma vez conhecidas as pressões e velocidades sobre a superfície inteira  $S$ , a pressão em um ponto arbitrário no campo acústico, a potência sonora radiada ( $W_{\text{rad}}$ ) e a eficiência de radiação acústica ( $\sigma_{\text{rad}}$ ) são obtidas, respectivamente, avaliando:

$$p(\mathbf{r}) = \int_S \left[ G(\mathbf{R}', \mathbf{r}) \frac{\partial p(\mathbf{R}')}{\partial n(\mathbf{R}')} - \frac{\partial G(\mathbf{R}', \mathbf{r})}{\partial n(\mathbf{R}')} p(\mathbf{R}') \right] dS(\mathbf{R}') \quad (6.5)$$

$$W_{\text{rad}} = \frac{1}{2} \int_S \text{Re} \{ \mathbf{p} \mathbf{v}_n^* \} dS \quad (6.6)$$

$$\sigma_{\text{rad}} = \frac{W_{\text{rad}}}{\rho c \int_S |\mathbf{v}_{\text{rms}}|^2 dS} \quad (6.7)$$

### 6.2.2 – Método Indireto (Aproximação Variacional)

A equação integral que forma a base da análise de elemento de contorno indireta é obtida em termos de descontinuidade de velocidade ( $\sigma$ , *single layer potencial*) e de pressão ( $\mu$ , *double layer potencial*) através da superfície, como:

$$p(\mathbf{R}) = - \int_S \left[ G(\mathbf{R}', \mathbf{R}) \sigma(\mathbf{R}') - \frac{\partial G(\mathbf{R}', \mathbf{R})}{\partial n(\mathbf{R}')} \mu(\mathbf{R}') \right] dS(\mathbf{R}') \quad (6.8)$$

onde  $\sigma$  e  $\mu$  estão relacionados, respectivamente, à diferença de velocidade de partícula e de pressão acústica através da superfície  $S$  como:

$$\sigma = \frac{\partial p^+}{\partial n} - \frac{\partial p^-}{\partial n} = -i\rho\omega(u^+ - u^-) \quad (6.9)$$

$$\mu = p^+ - p^- \quad (6.10)$$

Nas Eq. (6.9) e (6.10), os sobrescritos + e – simbolizam os valores em ambos os lados da superfície S. A equação integral para a velocidade de partícula normal pode ser obtida da equação integral de pressão como:

$$\frac{\partial p(\mathbf{R})}{\partial n(\mathbf{R})} = -i\rho\omega u = -\int_{S(\mathbf{R}')} \left[ \frac{\partial G(\mathbf{R}', \mathbf{R})}{\partial n(\mathbf{R})} \sigma(\mathbf{R}') - \frac{\partial^2 G(\mathbf{R}', \mathbf{R})}{\partial n(\mathbf{R}') \partial n(\mathbf{R})} \mu(\mathbf{R}') \right] dS(\mathbf{R}') \quad (6.11)$$

Embora a formulação indireta seja válida para condições de contorno em geral, a representação aqui é restrita a condições de contorno de velocidade para o propósito da abordagem feita para o problema de determinação da eficiência de radiação acústica. Sob esta condição, visto que  $\sigma = 0$ , a Eq. (6.11) é reduzida para:

$$-i\rho\omega u(\mathbf{R}) = \int_{S(\mathbf{R}')} \left[ \frac{\partial^2 G(\mathbf{R}', \mathbf{R})}{\partial n(\mathbf{R}') \partial n(\mathbf{R})} \mu(\mathbf{R}') \right] dS(\mathbf{R}') \quad (6.12)$$

A solução da Eq. (6.8) pode ser obtida pela minimização de um potencial J, onde:

$$J = \frac{1}{2} \int_{S(\mathbf{R})} \int_{S(\mathbf{R}')} \frac{\partial^2 G(\mathbf{R}', \mathbf{R})}{\partial n(\mathbf{R}') \partial n(\mathbf{R})} \mu(\mathbf{R}') \mu(\mathbf{R}) dS(\mathbf{R}') dS(\mathbf{R}) + \dots \\ i\rho\omega \int_{S(\mathbf{R})} u(\mathbf{R}) \mu(\mathbf{R}) dS(\mathbf{R}) \quad (6.13)$$

Os valores desejados das variáveis de superfície dos elementos de contorno,  $\mu$ , são aqueles que minimizam o funcional definido na Eq. (6.13). Este funcional pode ser expresso na forma matricial como:

$$J = \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{b} \quad (6.14)$$

onde os elementos da matriz  $\mathbf{A}$  e do vetor  $\mathbf{b}$  são obtidos da avaliação das integrais aproximando os potenciais  $\sigma$  e  $\mu$  nos nós dos elementos usados na discretização da superfície S. A equação final do sistema pode ser obtida, a partir da Eq. (6.14), impondo a condição de estacionariedade em  $\mu$ , isto é:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{b} \quad (6.15)$$

A solução da Eq. (6.15) é a solução do problema de valor de contorno prescrito. Subseqüentemente, as respostas de velocidade e pressão acústica no campo, potência sonora radiada e eficiência de radiação podem ser avaliadas pelas seguintes expressões:

$$p(\mathbf{r}) = -\int_S \left[ G(\mathbf{R}', \mathbf{r}) \sigma(\mathbf{R}') - \frac{\partial G(\mathbf{R}', \mathbf{r})}{\partial n(\mathbf{R}')} \mu(\mathbf{R}') \right] dS(\mathbf{R}') \quad (6.16)$$

$$\frac{\partial p(\mathbf{r})}{\partial x_j(\mathbf{r})} = -i\rho\omega u_j = -\int_S(\mathbf{R}') \left[ \frac{\partial G(\mathbf{R}', \mathbf{r})}{\partial x_j(\mathbf{r})} \sigma(\mathbf{R}') - \frac{\partial^2 G(\mathbf{R}', \mathbf{r})}{\partial n(\mathbf{R}') \partial x_j(\mathbf{r})} \mu(\mathbf{R}') \right] dS(\mathbf{R}') \quad (6.17)$$

$$W_{\text{rad}} = \frac{1}{2} \int_S \text{Re} \left\{ \mu v_n^* \right\} dS \quad (6.18)$$

$$\sigma_{\text{rad}} = \frac{W_{\text{rad}}}{\rho c \int_S |\mathbf{v}_{\text{rms}}|^2 dS} \quad (6.19)$$

onde  $x_j(\mathbf{r})$ , para  $j = 1$  a  $3$ , são os vetores unitários nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, na posição  $\mathbf{r}$  e  $u_j$  é a velocidade de partícula na direção  $x_j$  e posição  $\mathbf{r}$ .

### 6.2.3 – Procedimento de Cálculo

O procedimento para a predição da radiação acústica envolve, de um modo geral, como um passo inicial, a determinação da velocidade de superfície da estrutura sob análise, a qual tem origem no carregamento aplicado sobre a mesma. Em seguida, é feito o cálculo da pressão sonora, resolvendo a equação de onda acústica, através de um dos dois métodos descritos anteriormente, com as velocidades de superfície obtidas, na etapa inicial, empregadas como condições de contorno.

Pode-se realizar simulações considerando modelos com ou sem interação fluido-estrutura, sendo que para os problemas aqui apresentados este efeito é negligenciado, pelo fato do comportamento das estruturas não serem afetados de modo significativo pela presença do



fluido circundante, uma vez que este fluido não é pesado e nem tampouco as estruturas muito flexíveis. Assim, o problema é desacoplado e, como tal, os problemas estrutural e acústico são considerados separadamente.

A partir das considerações feitas anteriormente e tendo como objetivo a utilização de programas comerciais, que possibilitem a implementação da formulação teórica apresentada neste capítulo, é possível a obtenção dos deslocamentos da superfície vibrante pelo método de elementos finitos (MEF) através do programa ANSYS V. 5.4, o qual possibilita grandes recursos para a etapa de pré-processamento (geração da malha de elementos) e boas rotinas de solução para o problema de vibração estrutural, e de posse destes deslocamentos na superfície do modelo gerar as condições de contorno necessárias para resolver o problema acústico no SYSNOISE V. 5.4 pelo método de elementos de contorno (MEC). Um esquema resumindo o procedimento é apresentado na Fig. 6.1.

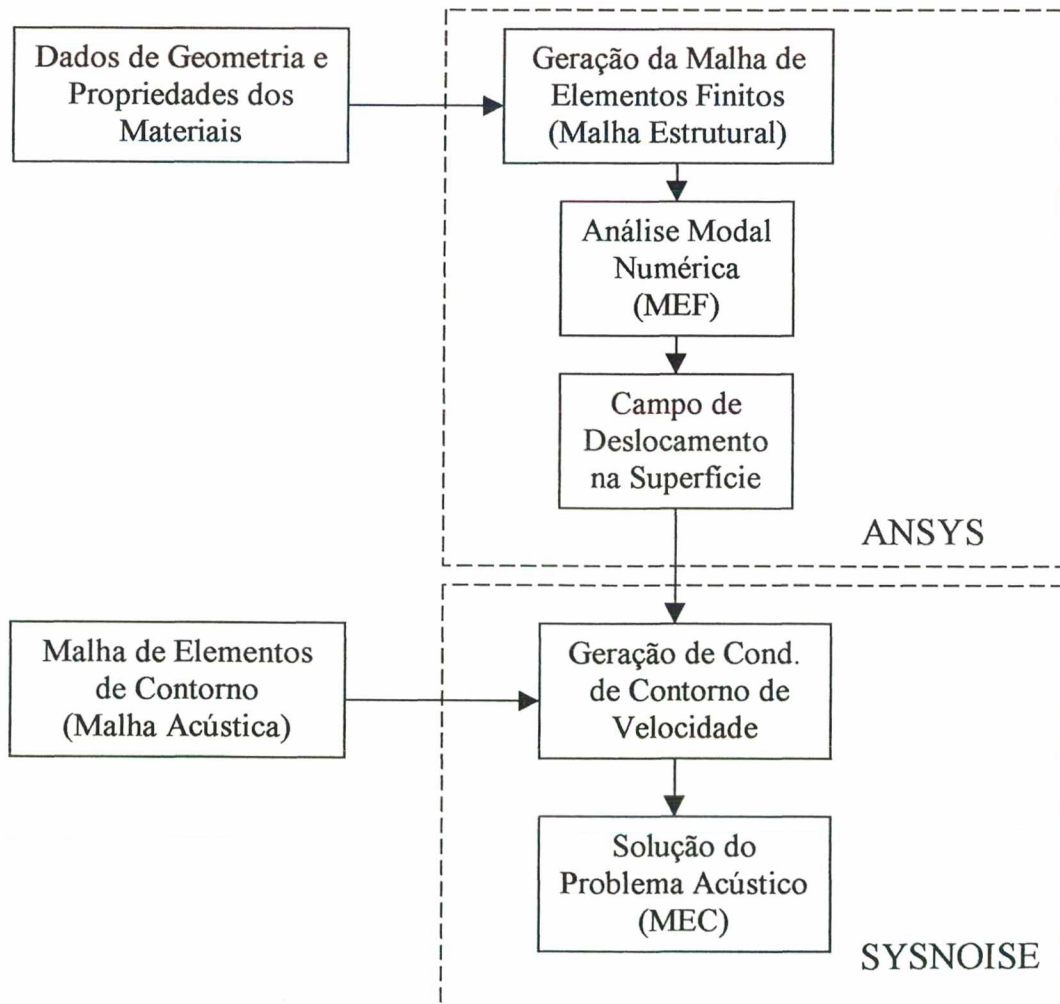


Figura 6.1 – Esquema do procedimento adotado na simulação numérica MEF/MEC.



No fluxograma apresentado na Fig. 6.1, mostra-se a possibilidade das malhas estrutural e acústica serem diferentes, embora de geometria similar. Isto pode ocorrer devido a certas características de modelagem, como por exemplo uma malha estrutural com elementos finitos tridimensionais e uma malha acústica que descreve a mesma geometria com elementos de contorno de superfície, bem como em situações em que, embora as malhas sejam constituídas por elementos de superfície, exista a necessidade de discretização diferente para as duas malhas, de modo a se estabelecer uma precisão de análise conveniente. Assim, quando os resultados estruturais usados para gerar as condições de contorno estão definidos para uma malha estrutural diferente da malha acústica e não existe coincidência no posicionamento dos nós é necessário a transposição destes resultados para a malha acústica, o que é feito através de uma média ponderada, com base na seguinte expressão [88]:

$$v_a = \frac{\sum_i \frac{1}{d_i} v_i}{\sum_i \frac{1}{d_i}} \quad (6.20)$$

em que  $v_a$  é o valor da velocidade no nó da malha acústica,  $v_i$  a velocidade no  $i$ -ésimo nó da malha estrutural e  $d_i$  a distância entre este nó e aquele da malha acústica. A Fig. 6.2 ilustra este procedimento aplicado para um elemento quadrilátero.

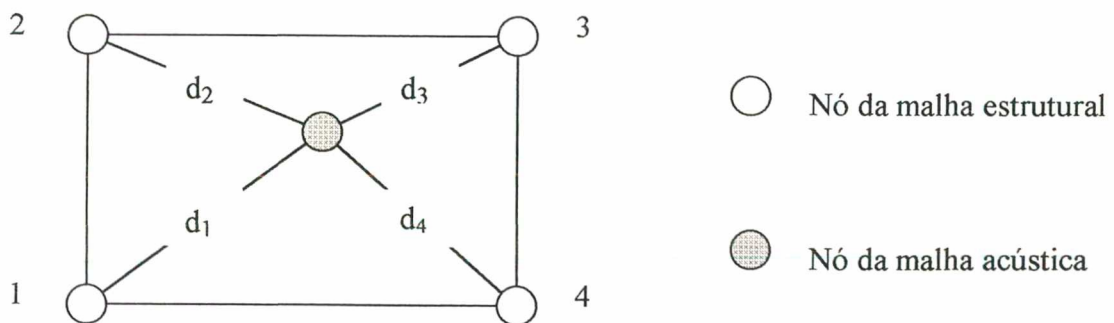


Figura 6.2 – Transposição de dados da malha estrutural para a malha acústica para  $i = 1$  a 4.

### 6.3 – SIMULAÇÃO DA PLACA SIMPLEMENTE APOIADA

Antes da utilização do procedimento apresentado neste capítulo, uma estrutura simples foi modelada para testar a validade do método de modelagem e a eficiência dos programas empregados para sua implementação. O exemplo escolhido para modelagem numérica foi o de uma placa simplesmente apoiada, tendo por base de comparação os resultados das curvas teóricas para a eficiência de radiação modal desenvolvidas por Wallace [97], quando do estudo de uma placa plana simplesmente apoiada vibrando em um *baffle* infinito ou, o que é o mesmo, radiando em meio espaço (radiação hemisférica).

Para a obtenção das previsões computacionais, um modelo de elementos finitos foi desenvolvido usando o ANSYS V. 5.4. As dimensões da placa foram 300x300x7 mm, de modo que a relação de forma ( $7/300 = 0,0233$ ) satisfaz o critério de placa fina e, por este motivo, um elemento de casca com capacidade de membrana e flexão foi selecionado (SHELL63). O modelo teve 900 elementos e 961 nós para uma malha de 30x30 elementos. O tamanho da malha foi determinado de forma a se obter um total de elementos por comprimento de onda acústica superior a 6 (seis), para se ter uma precisão aceitável dos resultados a serem obtidos. Assim, o menor comprimento de onda acústica, que corresponde à frequência mais alta de interesse, determinará o tamanho máximo do elemento.

Os resultados teóricos para as frequências naturais, de uma placa retangular simplesmente apoiada, podem ser obtidos a partir da seguinte equação apresentada por Leissa [49]:

$$f_{m,n} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}} \left( \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right) \quad (\text{Hz}) \quad (6.21)$$

onde  $a$  e  $b$  são os comprimentos dos lados da placa,  $h$  a espessura da placa e  $m, n = 1, 2, 3 \dots$  os índices modais correspondentes aos eixos  $x$  e  $y$  respectivamente. As outras quantidades são o módulo de elasticidade ( $E$ ), massa específica ( $\rho$ ) e o coeficiente de Poisson ( $\nu$ ), que para uma placa de alumínio, assumem os seguintes valores:  $E = 7,10 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ ,  $\rho = 2.700 \text{ kg/m}^3$  e  $\nu = 0,33$ .

A tabela 6.1 apresenta os valores teóricos da frequência natural calculados através da Eq. (6.21). Aqui, a frequência mais alta de interesse é 3448,49 Hz, o que corresponde a um comprimento de onda acústico de  $\lambda = 343/3448,49 \cong 0,09946 \text{ m}$  (99,46 mm). Portanto, o

comprimento máximo de um elemento deverá ser menor do que  $99,46/6 \cong 16,58$  mm, de modo a assegurar a precisão da resposta. Assim, foi assumido um comprimento de elemento de 10 mm, o que permite uma precisão até a frequência cujos índices modais são m e n iguais a 4.

Tabela 6.1 – Frequências naturais para uma placa quadrada de alumínio.

| ÍNDICE | $f_{m,n}$ (Hz) | MEF (Hz) | ERRO (%)* |
|--------|----------------|----------|-----------|
| (1,1)  | 383,17         | 383,05   | 0,03      |
| (1,2)  | 957,91         | 957,37   | 0,06      |
| (1,3)  | 1915,83        | 1914,26  | 0,08      |
| (2,2)  | 1532,66        | 1530,69  | 0,13      |
| (2,3)  | 2490,57        | 2485,96  | 0,19      |
| (3,3)  | 3448,49        | 3438,54  | 0,29      |

$$* \text{ERRO}(\%) = \left| \frac{\text{MEF} - f_{m,n}}{f_{m,n}} \right| \times 100$$

O modelo de elementos finitos, construído segundo as observações feitas anteriormente, é constituído por nós que apresentam seis graus de liberdade, três translações e três rotações, sendo que os três graus de liberdade de translação, para cada um dos nós ao longo das bordas da placa, foram feitos nulos e, assim, atender as condições de contorno de apoio simples, conforme mostrado na Fig. 6.3. Uma análise modal deste modelo, feita pelo ANSYS com o algoritmo de extração de autovalor e autovetor de Block Lanczos, produziu as frequências naturais listadas na tabela 6.1. Também na tabela estão os valores de erro relativo, de modo a servir como base de comparação entre os resultados teóricos e aqueles obtidos pelo ANSYS.

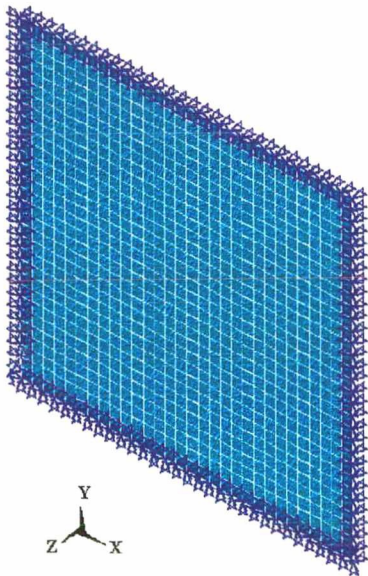


Figura 6.3 – Modelo de elementos finitos da placa quadrada.



Os valores teóricos, mostrados na tabela 6.1, são todos levemente mais altos do que aqueles determinados por MEF. Normalmente, espera-se que o contrário ocorra, uma vez que no MEF a estrutura ao ser discretizada aumenta artificialmente sua rigidez e, assim sendo, os valores das frequências naturais são sobrestimados. Entretanto, estas discrepâncias foram consideradas aceitáveis, uma vez que o erro foi menor que 1 % para as frequências e as formas modais correspondentes são consistentes com as formas modais teóricas, conforme pode ser observado na Fig. 6.4.

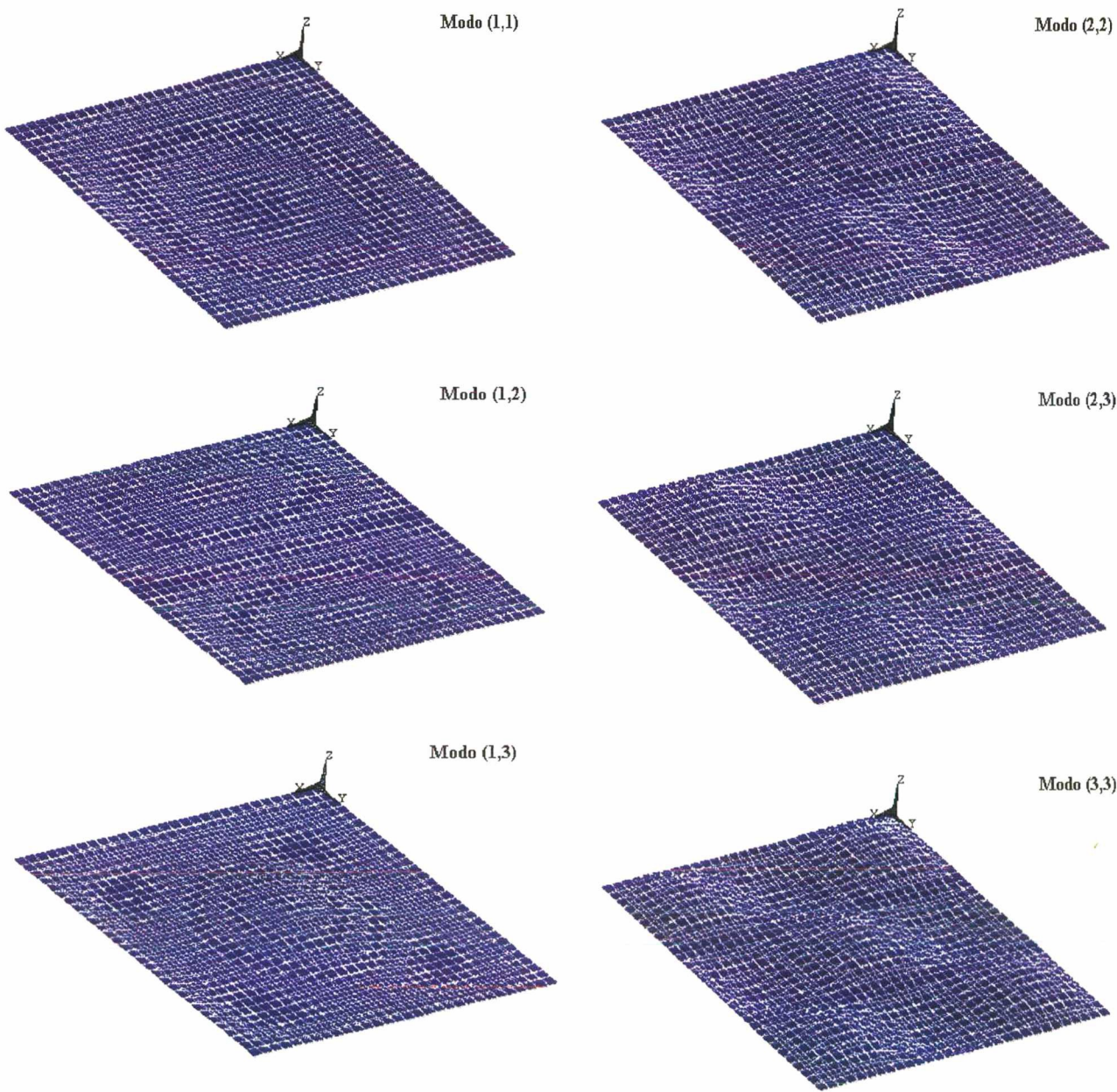


Figura 6.4 – Formas modais da placa quadrada obtidas pelo ANSYS.

Dando seqüência à simulação, as formas modais e frequências naturais, calculadas pelo ANSYS, foram fornecidas ao SYSNOISE que, assumindo o conjunto dos dados como um campo de deslocamento, converteu estes dados em campo de velocidade. Estas velocidades junto com a geometria da estrutura, aqui representada por uma malha acústica idêntica à malha estrutural, são usadas para resolver um conjunto de equações algébricas lineares para a pressão acústica na superfície da placa (método direto) e, conseqüentemente, possibilitar a determinação da eficiência de radiação modal da placa. A Figura 6.5 mostra a distribuição dos valores de pressão acústica na superfície da placa quadrada e a tabela 6.2 lista os valores de eficiência de radiação modal determinados pelo método de elementos de contorno (MEC) juntamente com as predições de Wallace [97].

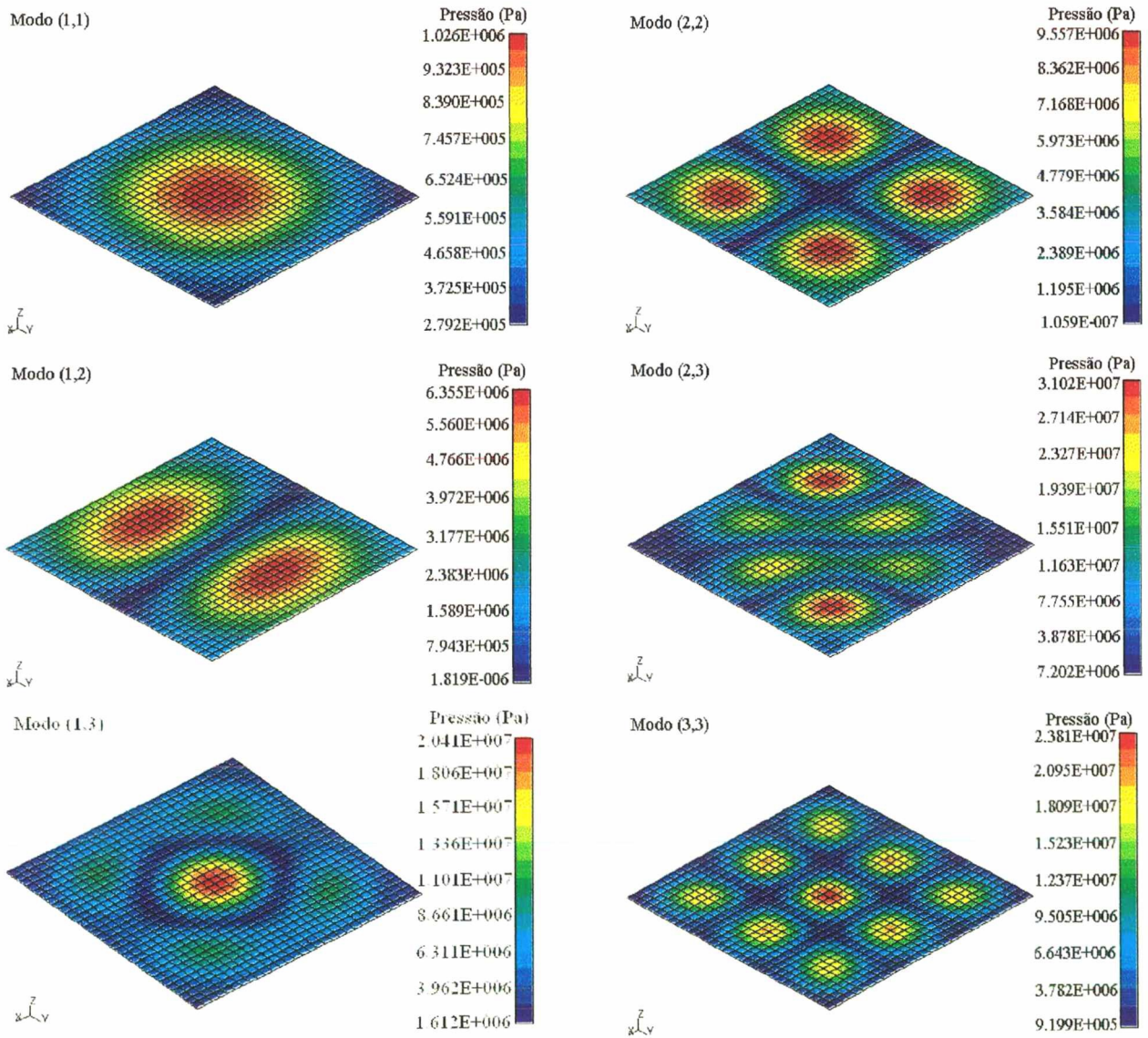


Figura 6.5 – Pressão Acústica na superfície da placa quadrada obtida pelo SYSNOISE.



Tabela 6.2 – Eficiência de radiação modal de uma placa quadrada.

| ÍNDICE | $k/k_b$ | $\sigma_{m,n}$ (dB) | $\sigma^*$ (dB) | Dif. (dB) |
|--------|---------|---------------------|-----------------|-----------|
| (1,1)  | 0,47    | -3,98               | -3,95           | -0,03     |
| (1,2)  | 0,75    | -1,25               | -1,27           | 0,03      |
| (1,3)  | 1,06    | 1,76                | 1,85            | -0,09     |
| (2,2)  | 0,95    | 1,07                | 1,05            | 0,02      |
| (2,3)  | 1,21    | 2,43                | 2,24            | 0,19      |
| (3,3)  | 1,42    | 1,76                | 1,36            | 0,40      |

\*Valor determinado pelo Método de Elementos de Contorno

Os valores da eficiência de radiação modal são comparados usando uma relação do número de onda normalizado. Esta relação é dada por  $k/k_b$ , onde  $k$  é o número de onda acústica e  $k_b$  é o número de onda de flexão da placa que é dado por [97]:

$$k_b = \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (6.22)$$

Todos os valores de eficiência de radiação determinados pelo MEC, quando comparados com aqueles preditos por Wallace [97], apresentam uma diferença inferior a 0,5 dB, o que permite uma validação razoável dos pacotes computacionais e do procedimento de cálculo adotado.

#### 6.4 – SIMULAÇÃO DO ALOJAMENTO DA CAIXA DE ENGRENAGEM

O procedimento apresentado de modo esquemático na Fig. 6.1 foi também aplicado para simulação do alojamento da caixa de engrenagem, tendo por base a análise modal numérica apresentada no Capítulo 5. Entretanto, a malha acústica do alojamento tem características diferentes da malha estrutural apresentada naquela análise. Essas diferenças residem no fato da exclusão de todos os elementos de viga BEAM44, usados como elementos de enrijecimento do alojamento, e dos elementos SHELL63, que modelam a parede interna de sustentação dos eixos da caixa de engrenagem, bem como o preenchimento dos furos de passagem dos eixos, localizados nas tampas traseira e dianteira do alojamento, com elementos SHELL63. Isto foi feito, uma vez que o interesse reside no problema de radiação exterior, de tal modo que o campo acústico interno não interage com o campo acústico externo, ou seja, o contorno que representa a superfície do alojamento é fechado. A Fig. 6.6 apresenta a malha acústica do alojamento.

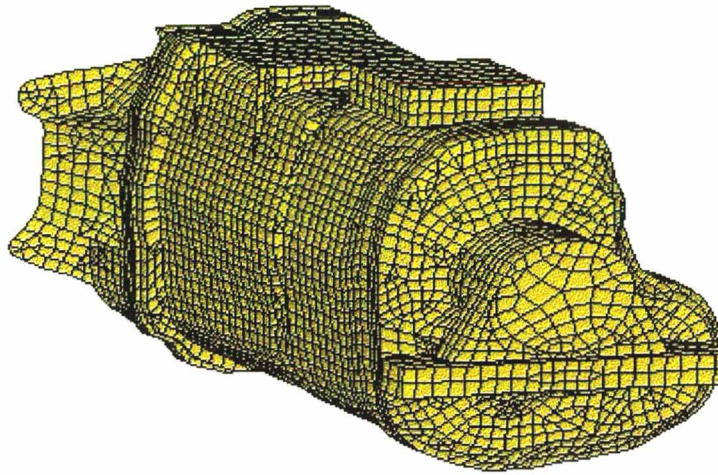


Figura 6.6– Malha acústica do alojamento da caixa de engrenagem.

O método de solução escolhido foi o método indireto por se tratar de um modelo de elementos de contorno que apresenta um grande número de nós. Neste caso, o método indireto permite um menor tempo de processamento, quando comparado com o método direto, uma vez que embora seja a matriz para ambos os métodos completamente preenchida, no método indireto ela é simétrica, o que não ocorre no método direto [88].

Tratando-se da aplicação do MEC para a simulação de um problema exterior, pode ocorrer o problema de não unicidade de solução em algumas frequências denominadas de frequências irregulares. Isto ocorre quando a superfície vibrante é representada por um contorno fechado e a frequência de interesse corresponde à frequência de ressonância acústica do problema interior com condições de contorno invertidas no método direto ou com condições de contorno idênticas no método indireto, como ilustrado na Fig. 6.7.

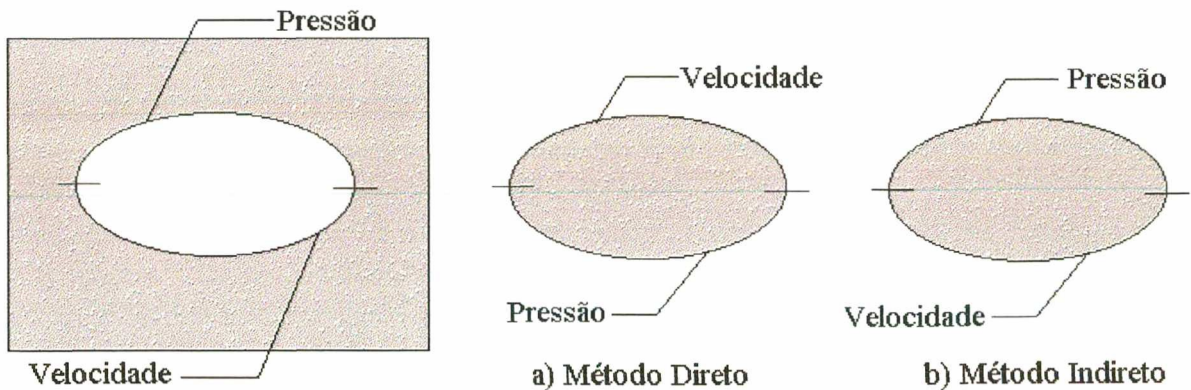


Figura 6.7 – Problemas exterior e interior com as respectivas condições de contorno [88].



A eliminação do problema relacionado com as frequências irregulares é possível e a técnica empregada depende da utilização do método direto ou indireto. Estas formulações podem ser encontradas nas referências [9] e [80], bem como uma descrição resumida no artigo de Coyette e Rossion [15]. Para o caso do método indireto, o procedimento consiste em simular uma quantidade de amortecimento dentro da superfície de contorno, o que é conseguido através de uma malha de elementos de contorno, para a qual é especificada uma condição de impedância ou de admitância, que para ser efetiva necessita ter um valor positivo para a parte real, de tal modo que o objetivo a ser alcançado é a modificação da forma do problema interior e, assim, a solução seja um campo de pressão nulo nas frequências consideradas. Os elementos desta malha interior, denominados de elementos de impedância singular, fazem parte da malha acústica e precisam respeitar as mesmas indicações feitas para a malha acústica, no que diz respeito ao tamanho dos elementos e condições de contorno de borda livre, ou seja, no mínimo seis elementos por comprimento de onda e *jump* de pressão nulo nas bordas livres.

É importante destacar que não existe uma regra estabelecida para a determinação do número de elementos e do posicionamento destes elementos no interior do contorno. Entretanto, o número de elementos está relacionado com o tamanho do modelo e a localização deve evitar orientações paralelas a planos de simetria e a aproximação da superfície de contorno. Assim, foram feitas simulações para três malhas distintas de elementos de impedância singular, designadas por Malha A, B e C conforme mostrado na Fig. 6.8, sendo que os resultados destas simulações são apresentados na tabela 6.3. Nesta tabela, a comparação entre os valores de eficiência de radiação apresenta valores máximos de diferença da ordem de centésimos o que é negligenciável. Isto posto, a malha acústica adotada para todas as simulações acústicas desta pesquisa é aquela designada por Malha C que, por ter mais elementos e um posicionamento interno melhor dos elementos, atende bem ao objetivo de eliminar as frequências irregulares.

Tabela 6.3 – Valores de eficiência de radiação para diferentes malhas.

| FREQ (Hz) | Malha A | Malha B | Malha C | Dif.max |
|-----------|---------|---------|---------|---------|
| 1050,85   | 0,43    | 0,46    | 0,44    | 0,03    |
| 1324,89   | 0,51    | 0,52    | 0,53    | 0,02    |
| 1424,90   | 0,70    | 0,71    | 0,65    | 0,06    |
| 1541,27   | 0,29    | 0,30    | 0,27    | 0,03    |
| 1639,33   | 1,01    | 0,95    | 0,93    | 0,08    |
| 1725,30   | 0,79    | 0,77    | 0,74    | 0,05    |
| 1861,71   | 0,41    | 0,44    | 0,46    | 0,05    |
| 1879,97   | 0,15    | 0,17    | 0,19    | 0,04    |
| 1968,53   | 0,56    | 0,52    | 0,51    | 0,05    |
| 2041,97   | 0,37    | 0,35    | 0,37    | 0,02    |

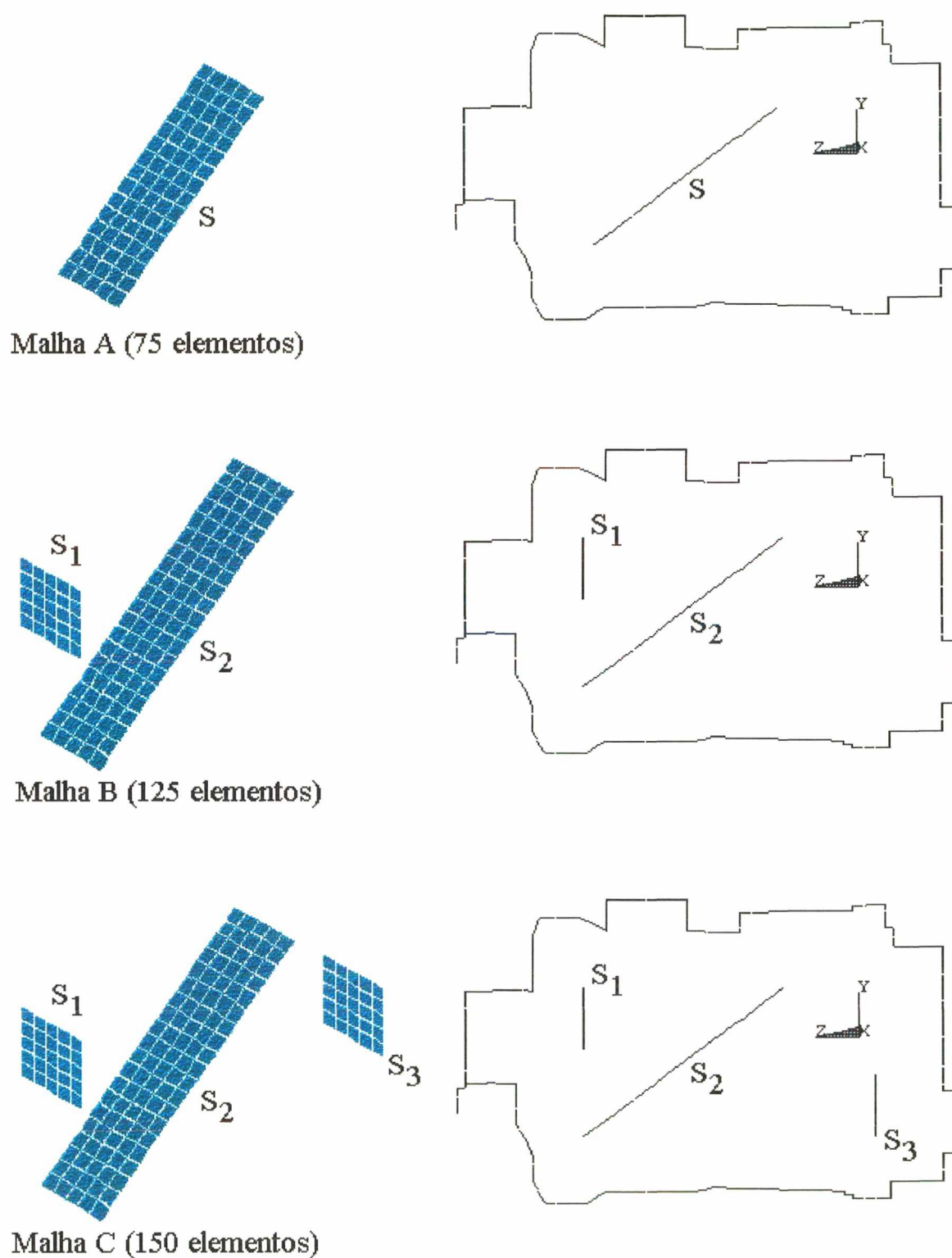


Figura 6.8 – Malhas de elementos de impedância singular e seus posicionamentos.



Uma análise dos valores apresentados na tabela 6.3 permite concluir que as formas modais que mais irradiam som são aquelas relacionadas às frequências 1424,9 Hz, 1639,3 Hz e 1725,3 Hz, com maior importância para o quinto modo de vibração (1639,3 Hz). Este fato mostra claramente uma maior participação de deformações de flexão na forma modal associada a esta frequência. Portanto, estas indicações podem ser usadas no controle de radiação sonora, uma vez que a potência sonora radiada por uma estrutura é função do campo de velocidade de vibração de sua superfície que, por sua vez, é o resultado da combinação linear dos modos de vibração da estrutura e, assim, dependente das frequências naturais da estrutura e das formas modais a elas relacionadas.

A Fig. 6.9 apresenta a distribuição superficial do *Double Layer Potencial*, em Pascal, para a malha acústica que contém em seu interior a Malha C de elementos de impedância singular.

## 6.5 – COMENTÁRIOS FINAIS

Neste capítulo foi apresentada uma metodologia para a determinação da eficiência de radiação modal de uma estrutura vibrante, usando o método de elementos de contorno, tendo por base os dados obtidos a partir da análise modal numérica feita pelo método de elementos finitos.

A simulação computacional de uma placa quadrada simplesmente apoiada permitiu a validação do procedimento de cálculo apresentado, uma vez que tanto os resultados da análise modal numérica quanto os valores de eficiência de radiação modal apresentaram uma boa concordância com os valores teóricos disponíveis na literatura técnica. Por outro lado, foi possível também atestar a eficiência dos programas ANSYS e SYSNOISE na solução de problemas desta natureza e apoiados nos métodos de elementos finitos e elementos de contorno.

A simulação do alojamento da caixa de engrenagem permitiu a obtenção de uma malha acústica consistente e com o problema de não unicidade de solução (frequências irregulares) equacionado permitindo, assim, a previsão das suas eficiências de radiação modal e a identificação dos modos que mais irradiam o som. A importância desta identificação está no fato de que, no caso de se desejar atenuar a potência sonora radiada pelo alojamento, uma boa indicação seria procurar modificar as formas modais que apresentam os maiores valores de eficiência de radiação, uma vez que o campo de velocidade estrutural na superfície é uma composição destas formas modais.



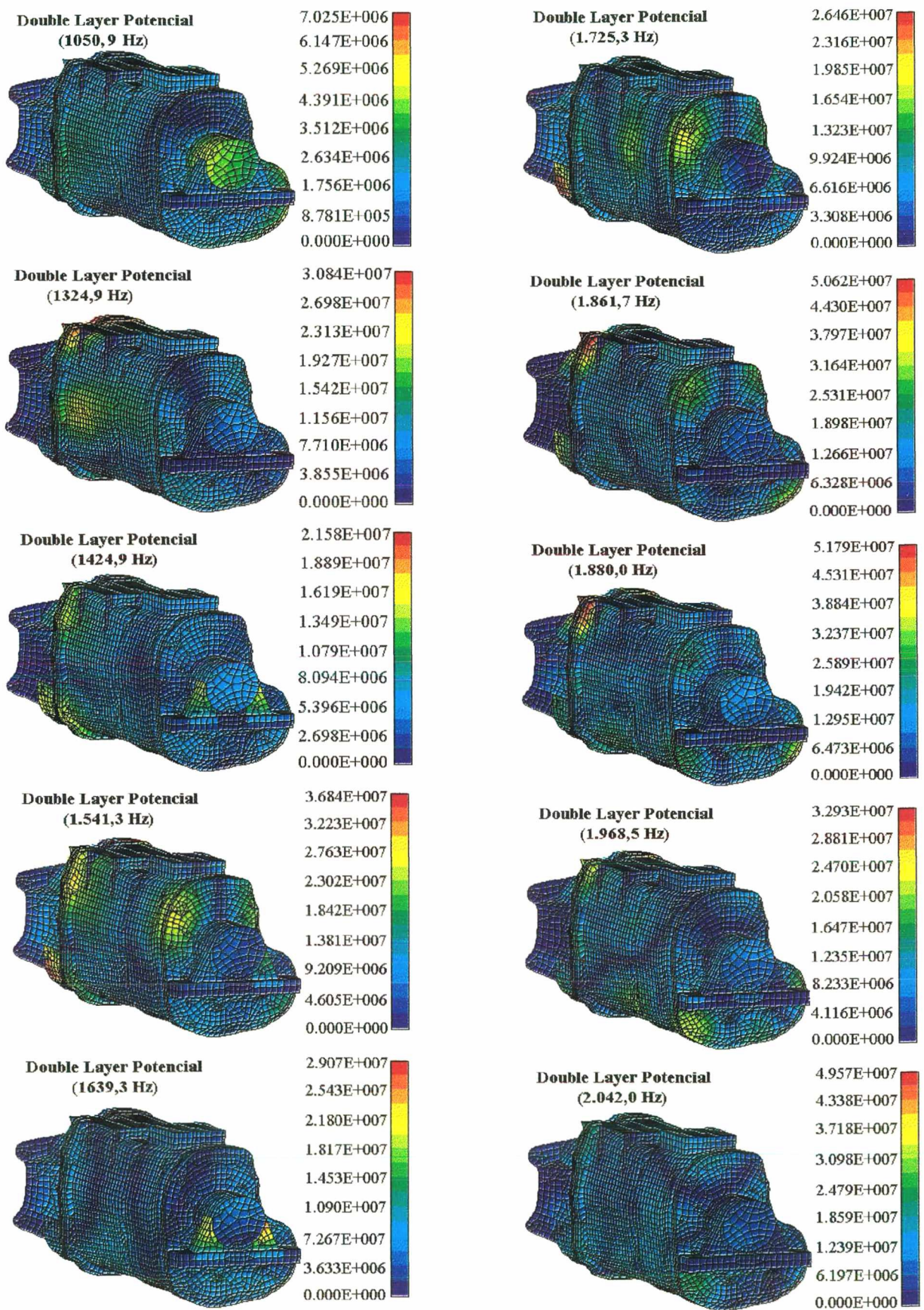


Figura 6.9 – Double Layer Potential (Pa) para os 10 primeiros modos de vibração.



## CAPÍTULO 7

### PREDIÇÃO DA RADIAÇÃO SONORA DA CAIXA DE ENGRENAGEM

#### 7.1 - INTRODUÇÃO

Em controle de ruído é quase sempre necessário prever não só o nível de pressão sonora mas também o nível de potência sonora ou a sua forma não dimensional, isto é, a eficiência de radiação, visto que o nível de pressão sonora varia com a distância e ambiente enquanto o nível de potência sonora é uma grandeza que depende somente da fonte sonora. Por outro lado, a potência sonora radiada por uma estrutura está intimamente relacionada ao campo de velocidade na sua superfície, que por sua vez é consequência das forças de excitação presentes e de suas características estruturais.

A predição da potência sonora radiada de uma estrutura passa, em geral, pela formulação de um modelo que permita a previsão de suas características dinâmicas obtendo-se, assim, as condições de contorno necessárias para a solução do problema acústico e, em consequência, a determinação dos parâmetros acústicos.

Neste capítulo, objetivando a determinação de parâmetros acústicos relacionados ao problema de radiação sonora da caixa de engrenagem, apresenta-se o modelo global da caixa de engrenagem e a metodologia de predição dos parâmetros vibro-acústicos, através dos métodos de elementos finitos e elementos de contorno combinados. Algumas simulações são desenvolvidas para condições distintas de marchas engrenadas variando-se o torque atuante e a rotação de funcionamento da caixa de engrenagem.

#### 7.2 – MODELO GLOBAL DE ELEMENTOS FINITOS

O modelo de elementos finitos da caixa de engrenagem é construído a partir da união do modelo do sistema de eixos engrenados com o modelo do alojamento, os quais foram apresentados nos Capítulos 4 e 5, respectivamente. A junção destes dois modelos é feita através das matrizes de rigidez que representam os mancais de rolamento e que foram obtidas a partir da formulação apresentada no Capítulo 2. Esta junção é feita através de um ponto nodal localizado sobre o eixo e vários pontos nodais localizados sobre o alojamento, conforme mostrado na Fig. 7.1.

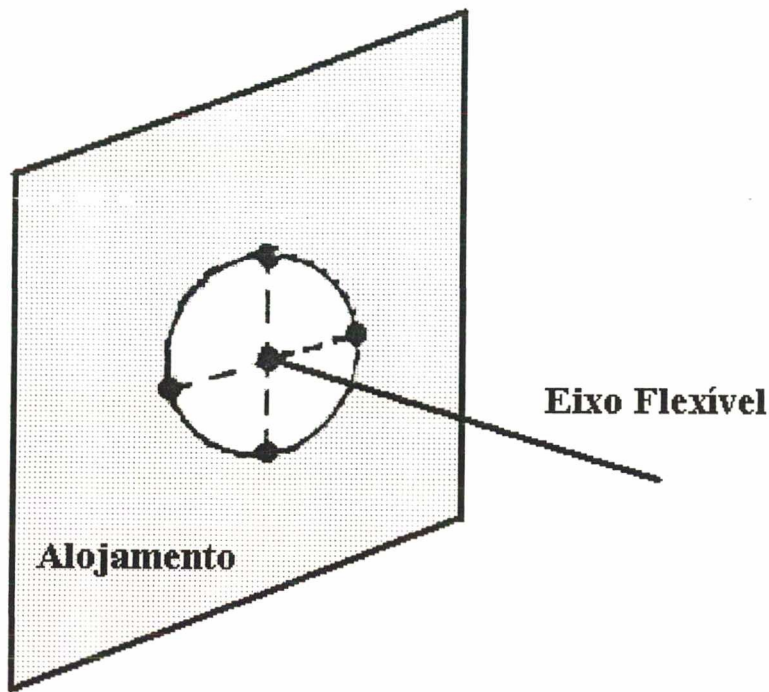


Figura 7.1 – Método de junção dos modelos pela matriz de rigidez do mancal.

A filosofia de discretização, aqui adotada, assume que o vetor de deslocamento relativo, dado pela diferença entre o vetor de deslocamento médio dos pontos nodais, correspondentes à sede do rolamento no alojamento, e o vetor de deslocamento de um ponto nodal que corresponde ao posicionamento do rolamento no eixo, é equivalente ao movimento de corpo livre do mancal de rolamento. Assim, os coeficientes das matrizes de rigidez que representam os mancais são divididos igualmente entre os pontos nodais do mancal de rolamento sobre o alojamento, fazendo com que esta ligação seja representada no modelo através da mesma quantidade de elementos MATRIX27, disponível na biblioteca de elementos do ANSYS V. 5.4. No limite, onde todos os pontos nodais do mancal de rolamento sobre o alojamento coincidem em um único ponto nodal, a matriz de rigidez de cada mancal é recuperada.

A Fig. 7.2, que apresenta os modelos do alojamento, do sistema de eixos engrenados para a condição de 1ª e 3ª marcha e o modelo global da caixa de engrenagem, mostra que cada um dos mancais de rolamento foi representado por quatro pontos nodais sobre o alojamento. Assim, a malha de elementos finitos que representa a caixa de engrenagem é uma combinação de 7764 elementos do tipo SHELL63, 987 elementos do tipo BEAM44, 96 elementos do tipo BEAM4, 27 elementos do tipo MATRIX27 e 15 elementos do tipo MASS21.



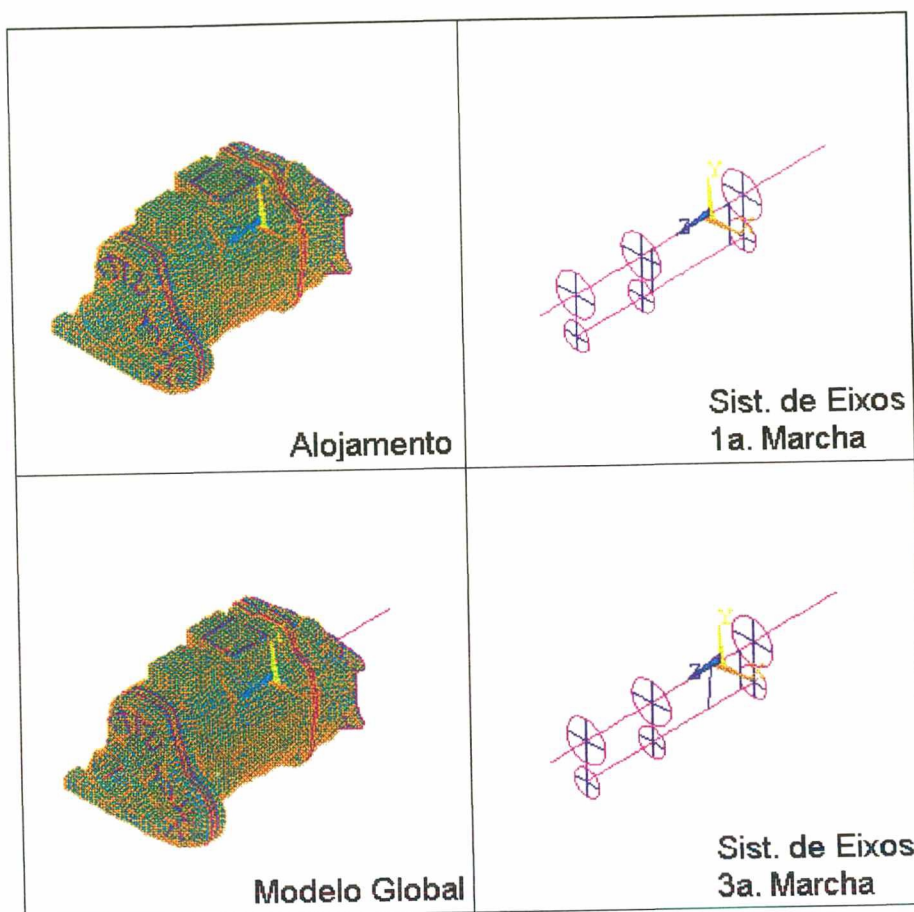


Figura 7.2 – Modelo global da caixa de engrenagem e suas partes.

### 7.3 – PROCEDIMENTO DE SIMULAÇÃO

O procedimento de simulação usando os métodos de elementos finitos e elementos de contorno, para solução do problema de radiação sonora, segue basicamente as mesmas etapas do procedimento descrito no item 6.2.3 do Capítulo 6. O problema é considerado desacoplado e os problemas estrutural e acústico são resolvidos separadamente usando os programas ANSYS V. 5.4 e o SYSNOISE V. 5.4, respectivamente.

O esquema mostrado na Fig. 7.3 é similar aquele apresentado na Fig. 6.1. A diferença básica está no fato de que uma etapa a mais é incluída no procedimento de solução do problema estrutural. Esta etapa, denominada de análise harmônica, determina o campo de deslocamento na superfície do alojamento, tendo por base as excitações devido ao engrenamento, que produzem forças nas direções X e Y e momentos em torno do eixo Z, nas frequências de engrenamento e seus respectivos harmônicos. Em seguida, a formulação variacional (método indireto) do método de elementos de contorno é usada para prever os parâmetros acústicos com base na malha acústica selecionada no Capítulo 6.

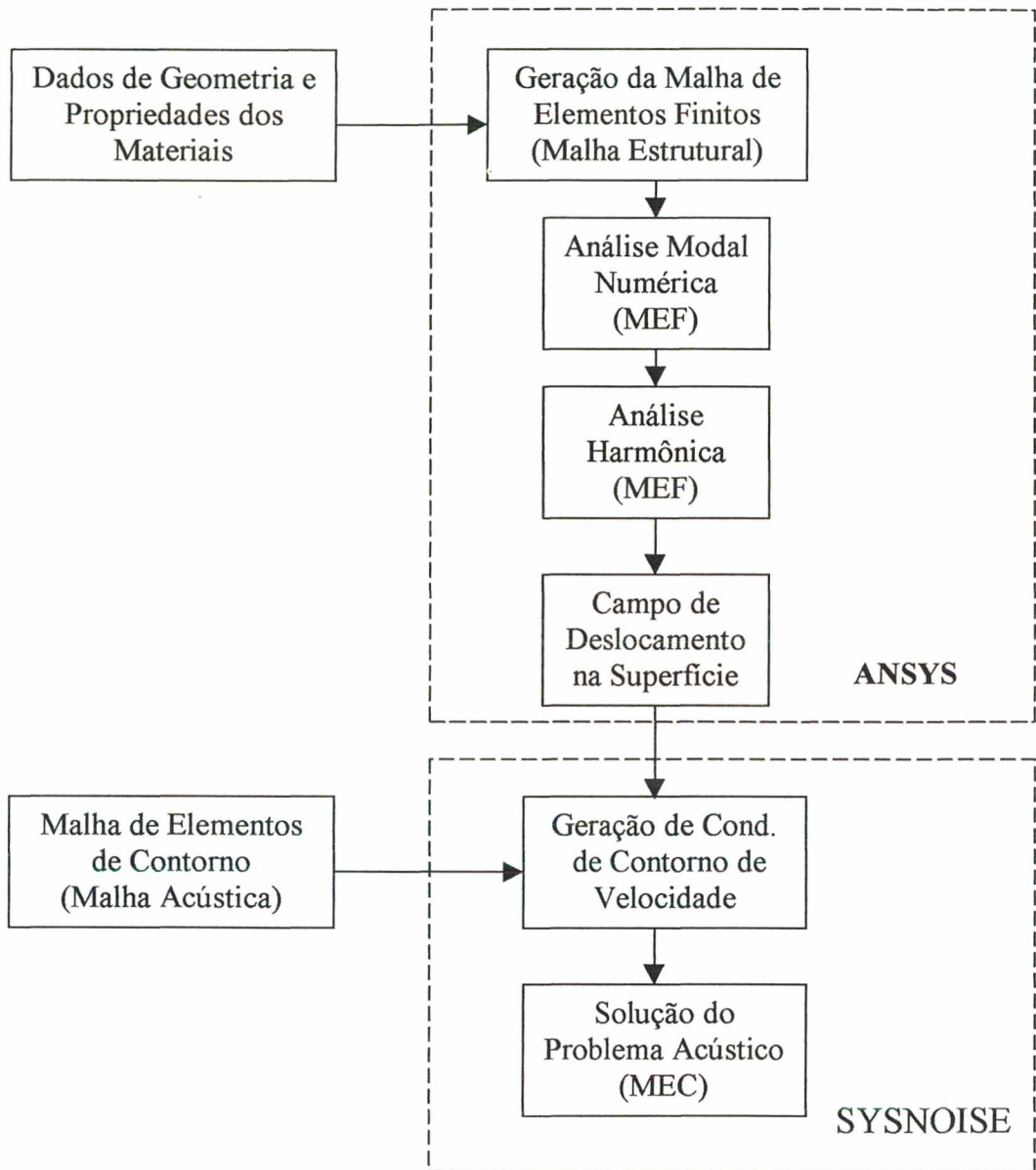


Figura 7.3 – Esquema do procedimento de simulação do problema de radiação sonora.

O procedimento apresentado na Fig. 7.3 foi empregado na simulação de motores elétricos, num trabalho de cooperação técnica com GRUCAD - UFSC, produzindo resultados que foram validados através de dados experimentais, conforme pode ser comprovado nas referências [10] e [64], o que atesta a qualidade deste procedimento.

#### 7.4 – PREDIÇÃO DO COMPORTAMENTO DINÂMICO

O objetivo básico da análise dinâmica aqui apresentada é a determinação do campo de deslocamento na superfície do alojamento da caixa de engrenagem. Assim, no programa ANSYS

V. 5.4, foi implementado o procedimento de análise harmônica com base no método de expansão modal. Neste procedimento, é necessário o desenvolvimento inicial da análise modal numérica, uma vez que a resposta forçada é determinada a partir da combinação linear das formas modais da estrutura a ser analisada.

#### **7.4.1 – Análise Modal**

Na análise modal desenvolvida, as condições de contorno especificadas para o problema visaram estabelecer situações extremas de operação e que estão relacionadas com a forma de fixação da caixa de engrenagem. Assim, conforme mostrado na Fig. 7.4, as seguintes situações de fixação foram estabelecidas:

- a) Fixa-fixa (Fig. 7.4(a)) – os graus de liberdade dos pontos de fixação localizados nas tampas dianteira e traseira da caixa de engrenagem são feitos nulos, simulando condições de junções parafusadas em estruturas rígidas.
- b) Fixa-livre (Fig. 7.4(b)) – somente os graus de liberdade correspondentes a fixação da tampa traseira, onde a caixa é presa ao motor, são feitos nulos. Na tampa dianteira, os graus de liberdade dos pontos de fixação são assumidos terem liberdade de movimento (condição de contorno de borda livre).

Nas condições de contorno assumidas e descritas acima, a diferença básica diz respeito a fixação da parte dianteira da caixa de engrenagem que, na prática, é geralmente fixada em coxins. Portanto, os nós que representam estes pontos de fixação estão submetidos a efeitos de rigidez e amortecimento conferido pelos coxins. Assim, o objetivo das duas condições de contorno especificadas é o de estabelecer as condições extremas de rigidez naqueles pontos.

Outra informação importante está relacionada com as condições operacionais da caixa de engrenagem assumidas para a geração dos resultados numéricos. Neste item, o engrenamento foi modelado para as engrenagens com perfil de dente modificado e foram consideradas as condições de 1ª e de 3ª marcha, submetidas aos carregamentos de 50 e 100 % do torque máximo de projeto.

A análise modal numérica objetivou a determinação de modos de vibração que permitissem uma boa precisão para a predição das vibrações forçadas até a frequência limite de 3 kHz. Devido a este objetivo, a extração dos parâmetros modais, a partir do algoritmo de *Block*



*Lanczos*, foi feita para uma frequência limite de 5 kHz atendendo plenamente a regra prática que diz “o número de modos especificados deve cobrir aproximadamente 50 % a mais da faixa de frequência das cargas harmônicas de interesse” [2]. A tabela 7.1 apresenta os valores das frequências naturais, referentes aos 45 primeiros modos de vibração, para os seis modelos processados no ANSYS.

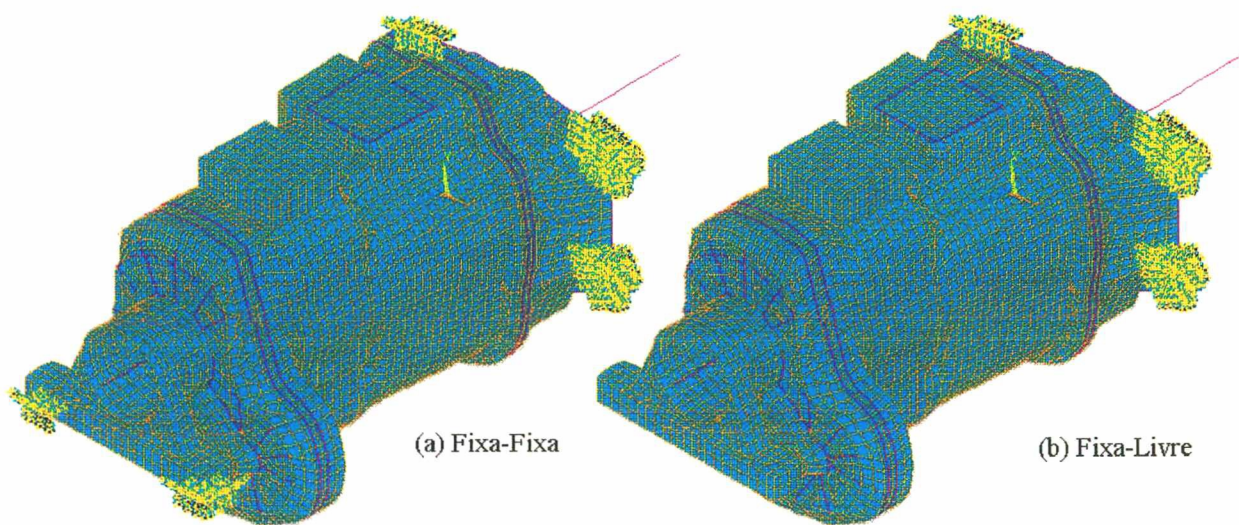


Figura 7.4 – Malha estrutural da caixa de engrenagem e condições de contorno.

Os resultados da análise modal mostram que para a condição de contorno Fixa-Livre aparecem dois modos de vibração, identificados na tabela 7.1 como o 3º e o 4º modos (células em destaque), cujos valores de frequência natural não encontram correspondência com valores associados à condição de contorno Fixa-Fixa. Isto ocorre devido à condição de contorno Fixa-Livre permitir a movimentação da parte dianteira da caixa em qualquer uma das direções representadas pelo sistema de coordenadas de referência usado, o que possibilita o aparecimento de formas modais do tipo flexional do alojamento, como se o conjunto fosse uma viga em balanço, conforme podemos observar na Fig. 7.5 a título de ilustração. Por outro lado, como era esperado, as mudanças nas condições operacionais (torque de entrada e marcha engrenada) provocam modificações nos valores de frequência natural e das formas modais a elas associadas, o que se refletirá na resposta forçada do conjunto e nos parâmetros acústicos correspondentes. A diferença que ocorre é motivada pela mudança das propriedades de rigidez e inércia do conjunto, principalmente, devido às modificações que ocorrem nas matrizes de rigidez, que representam os engrenamentos e os mancais de rolamento, bem como nas matrizes de massa que representam os pares de engrenagens associados às marchas engrenadas.



## CAPÍTULO 7 – Predição da Radiação Sonora da Caixa de Engrenagem

Tabela 7.1 - Frequências naturais para o modelo global.

| Modo | Primeira Marcha |           |            |           | Terceira Marcha |           |            |           |
|------|-----------------|-----------|------------|-----------|-----------------|-----------|------------|-----------|
|      | Fixa-Fixa       |           | Fixa-Livre |           | Fixa-Fixa       |           | Fixa-Livre |           |
|      | 50% de T        | 100% de T | 50% de T   | 100% de T | 50% de T        | 100% de T | 50% de T   | 100% de T |
| 1    | 75,34           | 80,40     | 75,25      | 80,27     | 77,51           | 71,88     | 77,43      | 71,64     |
| 2    | 95,86           | 92,25     | 95,76      | 92,11     | 87,87           | 84,63     | 87,51      | 84,31     |
| 3    | 436,22          | 452,23    | 206,37     | 207,51    | 391,25          | 405,28    | 205,12     | 206,13    |
| 4    | 488,87          | 492,84    | 210,85     | 212,14    | 458,62          | 454,62    | 212,45     | 213,24    |
| 5    | 527,99          | 534,75    | 436,62     | 448,32    | 505,58          | 508,37    | 381,36     | 391,16    |
| 6    | 559,56          | 569,65    | 500,59     | 504,36    | 560,78          | 566,59    | 458,78     | 454,55    |
| 7    | 582,69          | 598,23    | 552,41     | 572,19    | 600,91          | 619,30    | 589,47     | 605,35    |
| 8    | 709,23          | 752,36    | 647,38     | 654,76    | 711,05          | 724,35    | 631,40     | 639,76    |
| 9    | 784,28          | 791,20    | 715,87     | 740,23    | 746,21          | 769,54    | 701,35     | 713,85    |
| 10   | 806,66          | 825,98    | 760,77     | 777,59    | 776,81          | 797,41    | 750,87     | 759,02    |
| 11   | 856,48          | 863,82    | 815,78     | 825,70    | 821,18          | 829,79    | 780,56     | 791,09    |
| 12   | 914,49          | 938,08    | 856,68     | 882,75    | 942,72          | 1004,40   | 850,02     | 868,60    |
| 13   | 949,25          | 1003,30   | 941,48     | 946,46    | 1045,20         | 1050,30   | 966,44     | 1005,10   |
| 14   | 1170,60         | 1210,80   | 986,92     | 1022,20   | 1066,10         | 1112,20   | 1044,40    | 1049,50   |
| 15   | 1185,20         | 1221,10   | 1065,90    | 1104,50   | 1223,60         | 1254,00   | 1075,00    | 1119,30   |
| 16   | 1291,10         | 1315,20   | 1160,00    | 1209,00   | 1247,30         | 1267,50   | 1142,30    | 1191,80   |
| 17   | 1333,50         | 1349,00   | 1242,00    | 1285,10   | 1327,40         | 1342,50   | 1182,20    | 1235,30   |
| 18   | 1433,70         | 1443,00   | 1293,70    | 1313,70   | 1423,50         | 1447,70   | 1256,10    | 1272,10   |
| 19   | 1480,00         | 1492,60   | 1329,20    | 1386,30   | 1451,10         | 1461,70   | 1309,20    | 1319,40   |
| 20   | 1504,90         | 1536,00   | 1421,00    | 1453,80   | 1518,10         | 1535,30   | 1411,70    | 1445,30   |
| 21   | 1582,50         | 1595,70   | 1491,30    | 1512,50   | 1532,50         | 1549,50   | 1432,60    | 1468,20   |
| 22   | 1594,90         | 1609,00   | 1503,00    | 1524,50   | 1597,40         | 1607,20   | 1510,90    | 1525,60   |
| 23   | 1628,10         | 1667,50   | 1508,30    | 1538,00   | 1655,40         | 1678,80   | 1544,40    | 1553,40   |
| 24   | 1689,70         | 1714,20   | 1580,50    | 1597,20   | 1671,90         | 1692,50   | 1575,50    | 1584,00   |
| 25   | 1821,50         | 1829,00   | 1600,90    | 1609,30   | 1850,70         | 1861,00   | 1592,10    | 1635,30   |
| 26   | 1855,60         | 1867,20   | 1734,30    | 1801,40   | 1932,10         | 1970,70   | 1638,60    | 1687,10   |
| 27   | 1913,80         | 1997,50   | 1805,20    | 1815,80   | 1979,10         | 2010,70   | 1817,60    | 1832,30   |
| 28   | 2012,40         | 2033,30   | 1840,50    | 1868,10   | 2014,20         | 2028,70   | 1858,40    | 1878,50   |
| 29   | 2023,80         | 2056,40   | 1877,90    | 1944,90   | 2046,10         | 2073,10   | 1940,00    | 1957,90   |
| 30   | 2076,10         | 2093,50   | 1924,80    | 1988,60   | 2116,90         | 2139,20   | 2003,40    | 2017,80   |
| 31   | 2162,50         | 2179,30   | 2030,10    | 2049,60   | 2188,30         | 2191,90   | 2080,20    | 2090,10   |
| 32   | 2180,80         | 2194,50   | 2078,10    | 2086,60   | 2240,90         | 2264,20   | 2161,60    | 2187,40   |
| 33   | 2198,00         | 2246,70   | 2081,80    | 2109,70   | 2296,10         | 2317,30   | 2199,90    | 2205,60   |
| 34   | 2278,60         | 2304,90   | 2169,40    | 2182,60   | 2332,30         | 2360,40   | 2224,50    | 2277,20   |
| 35   | 2281,70         | 2346,80   | 2192,20    | 2204,00   | 2393,00         | 2407,50   | 2278,10    | 2292,50   |
| 36   | 2401,80         | 2427,80   | 2233,10    | 2284,90   | 2433,00         | 2449,50   | 2356,40    | 2371,20   |
| 37   | 2428,50         | 2462,60   | 2379,30    | 2394,60   | 2504,70         | 2527,30   | 2398,00    | 2423,40   |
| 38   | 2533,70         | 2551,70   | 2403,80    | 2448,00   | 2548,90         | 2572,60   | 2441,70    | 2458,20   |
| 39   | 2615,00         | 2637,60   | 2441,50    | 2478,60   | 2569,50         | 2579,70   | 2459,30    | 2476,70   |
| 40   | 2664,00         | 2678,70   | 2493,40    | 2505,90   | 2685,50         | 2697,10   | 2497,60    | 2511,80   |
| 41   | 2831,90         | 2849,00   | 2530,40    | 2549,10   | 2812,10         | 2829,90   | 2568,40    | 2574,40   |
| 42   | 2857,50         | 2873,70   | 2675,80    | 2699,70   | 2838,20         | 2852,10   | 2621,50    | 2644,40   |
| 43   | 2883,60         | 2894,70   | 2752,30    | 2761,50   | 2873,70         | 2879,40   | 2757,40    | 2766,90   |
| 44   | 2944,90         | 2960,80   | 2842,00    | 2865,10   | 2974,40         | 2988,00   | 2811,50    | 2829,70   |
| 45   | 2981,50         | 2994,90   | 2861,60    | 2873,00   | 2976,30         | 2990,40   | 2861,20    | 2870,40   |



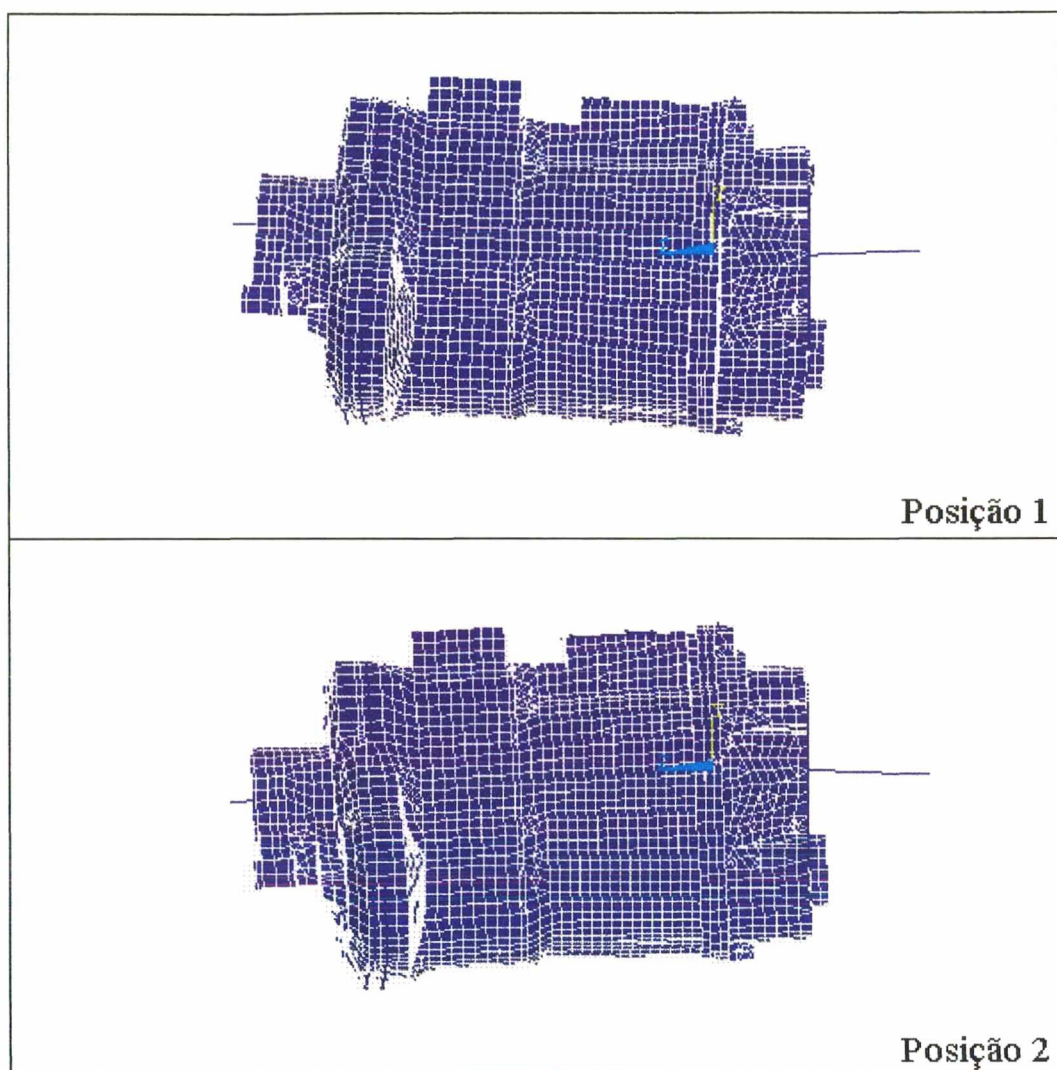


Figura 7.5 – Vista lateral da forma modal referente a  $f_n = 207,51$  Hz, na condição de 1ª marcha e 100 % de T.

#### 7.4.2 – Análise Harmônica

A análise harmônica foi desenvolvida de modo a permitir simular situações distintas de operação da caixa de engrenagem variando, além das condições de 1ª e 3ª marcha, para condições de contorno distintas, o torque e a rotação. Por outro lado, é fato conhecido que a condição de operação de 1ª marcha se caracteriza por apresentar valores de torque médio a alto e velocidades de rotação baixa a média, diferente da condição de 3ª marcha que, normalmente, ocorre para torque médio e condições de velocidade de média a alta. Assim, as tabelas 7.2 e 7.3 listam as condições de operação para as quais foram geradas as informações de deslocamento,

para cada um dos nós da malha estrutural, e que são usadas como condição de contorno do problema acústico.

Tabela 7.2 – Condições de operação para simulação em 1ª marcha

| IDENTIFICAÇÃO | C. DE CONTORNO | TORQUE (N.m)    | ROTAÇÃO (rpm) |
|---------------|----------------|-----------------|---------------|
| F1T50H30      | FIXA - FIXA    | 210 (50% de T)  | 1800 (30 Hz)  |
| F1T50H40      |                |                 | 2400 (40 Hz)  |
| F1T100H30     |                | 420 (100% de T) | 1800 (30 Hz)  |
| F1T100H40     |                |                 | 2400 (40 Hz)  |
| L1T50H30      | FIXA - LIVRE   | 210 (50% de T)  | 1800 (30 Hz)  |
| L1T50H40      |                |                 | 2400 (40 Hz)  |
| L1T100H30     |                | 420 (100% de T) | 1800 (30 Hz)  |
| L1T100H40     |                |                 | 2400 (40 Hz)  |

Tabela 7.3 – Condições de operação para simulação em 3ª marcha.

| IDENTIFICAÇÃO | C. DE CONTORNO | TORQUE (N.m)   | ROTAÇÃO (rpm) |
|---------------|----------------|----------------|---------------|
| F3T50H40      | FIXA - FIXA    | 210 (50% de T) | 2400 (40 Hz)  |
| F3T50H50      |                |                | 3000 (50 Hz)  |
| L3T50H40      | FIXA - LIVRE   | 210 (50% de T) | 2400 (40 Hz)  |
| L3T50H50      |                |                | 3000 (50 Hz)  |

A excitação do conjunto é devido ao erro de engrenamento estático, tendo como referência engrenagens com o perfil de dente modificado, e o amortecimento viscoso foi assumido ser constante para cada modo, com o valor do fator de amortecimento igual a 0,1, conforme foi feito na análise harmônica apresentada no Capítulo 4.

Exemplos de resultados da análise, na forma de espectro de frequência discreto de velocidade, são mostrados nas Fig. 7.6 a 7.9 para as condições de 1ª marcha - 100 % de T e 3ª marcha - 50% de T. Estas figuras foram obtidas para posições distintas do alojamento, onde a direção associada ao sistema de referência se aproxima da direção normal à superfície, conforme pode ser visualizado na Fig. 7.10.

Uma observação das Fig. 7.6 a 7.9 permite constatar que a alteração da rotação do eixo de entrada (eixo piloto) modifica os valores de pico de velocidade, como era de se esperar. Este efeito aparece devido à modificação dos valores das frequências de engrenamento e seus harmônicos, o que leva a uma composição diferente dos modos de vibração que contribuem para a resposta forçada da caixa de engrenagem. Percebe-se, assim, que a rotação de 3000 rpm é mais



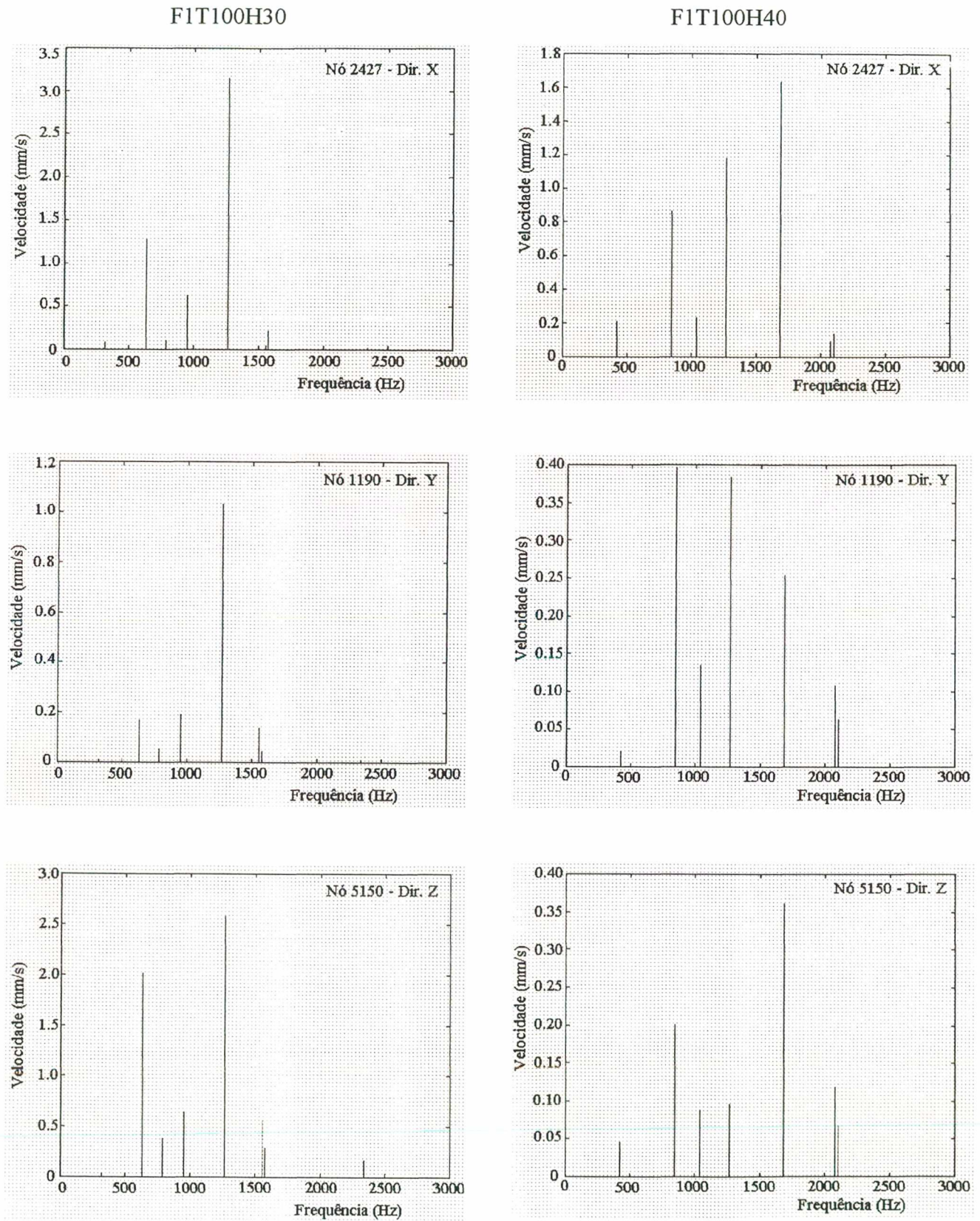


Figura 7.6 – Amplitude de velocidade, em nós sobre a superfície do alojamento, para condição de 1ª marcha – 100% de T – C.C. Fixa-Fixa.



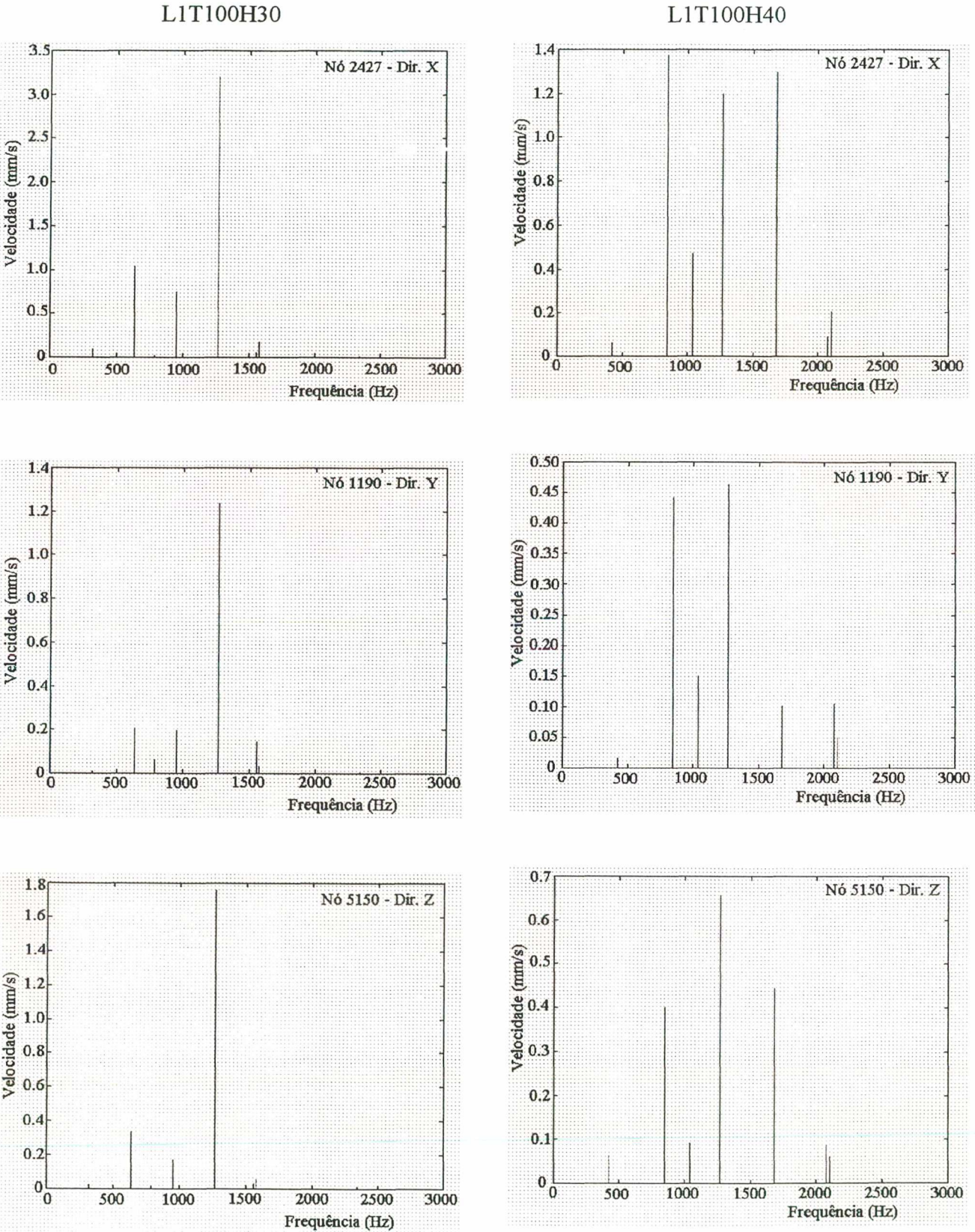


Figura 7.7 – Amplitude de velocidade, em nós sobre a superfície do alojamento, para condição de 1ª marcha – 100% de T – C.C. Fixa-Livre.



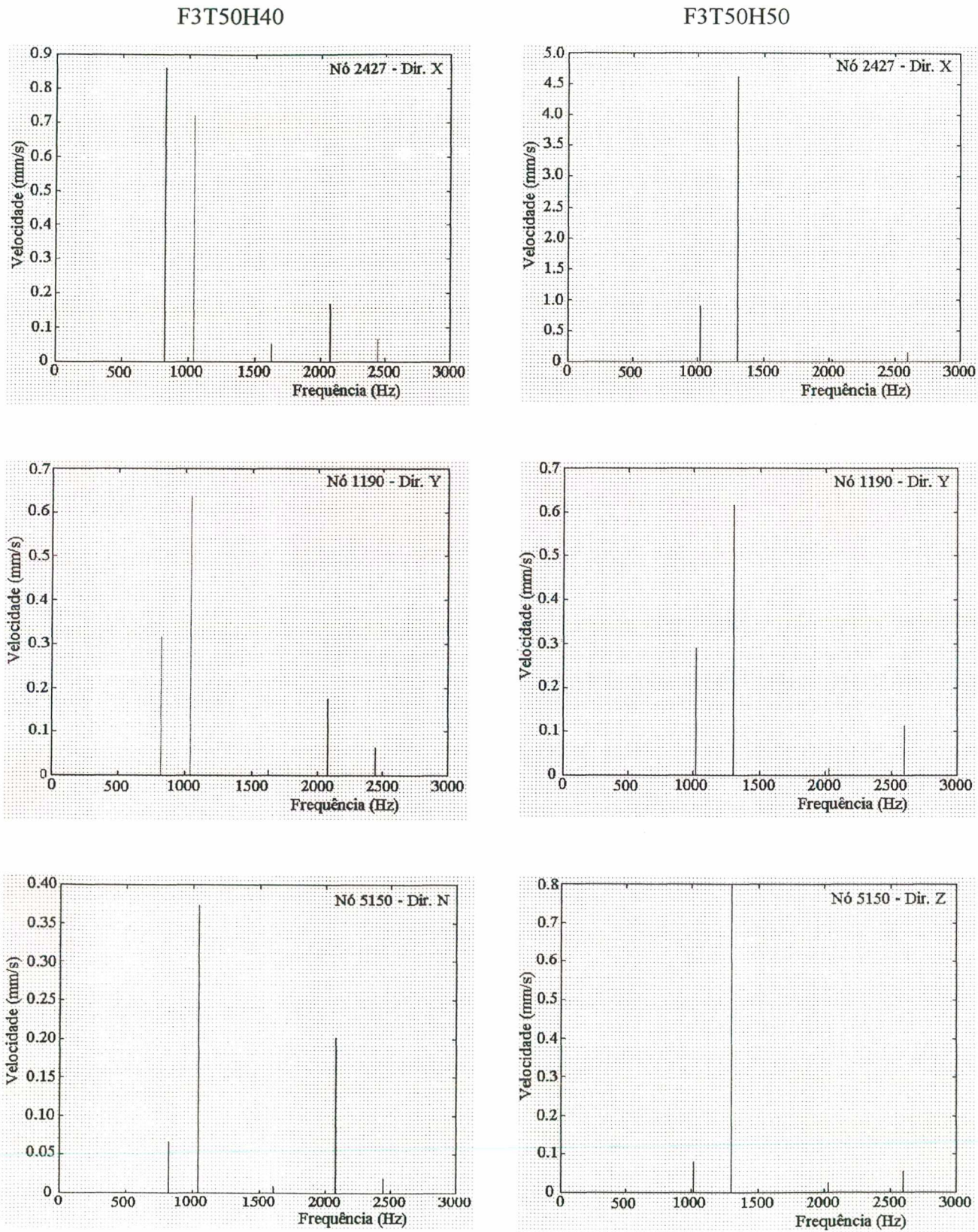


Figura 7.8 – Amplitude de velocidade, em nós sobre a superfície do alojamento, para condição de 3ª marcha – 50% de T – C.C Fixa-Fixa.



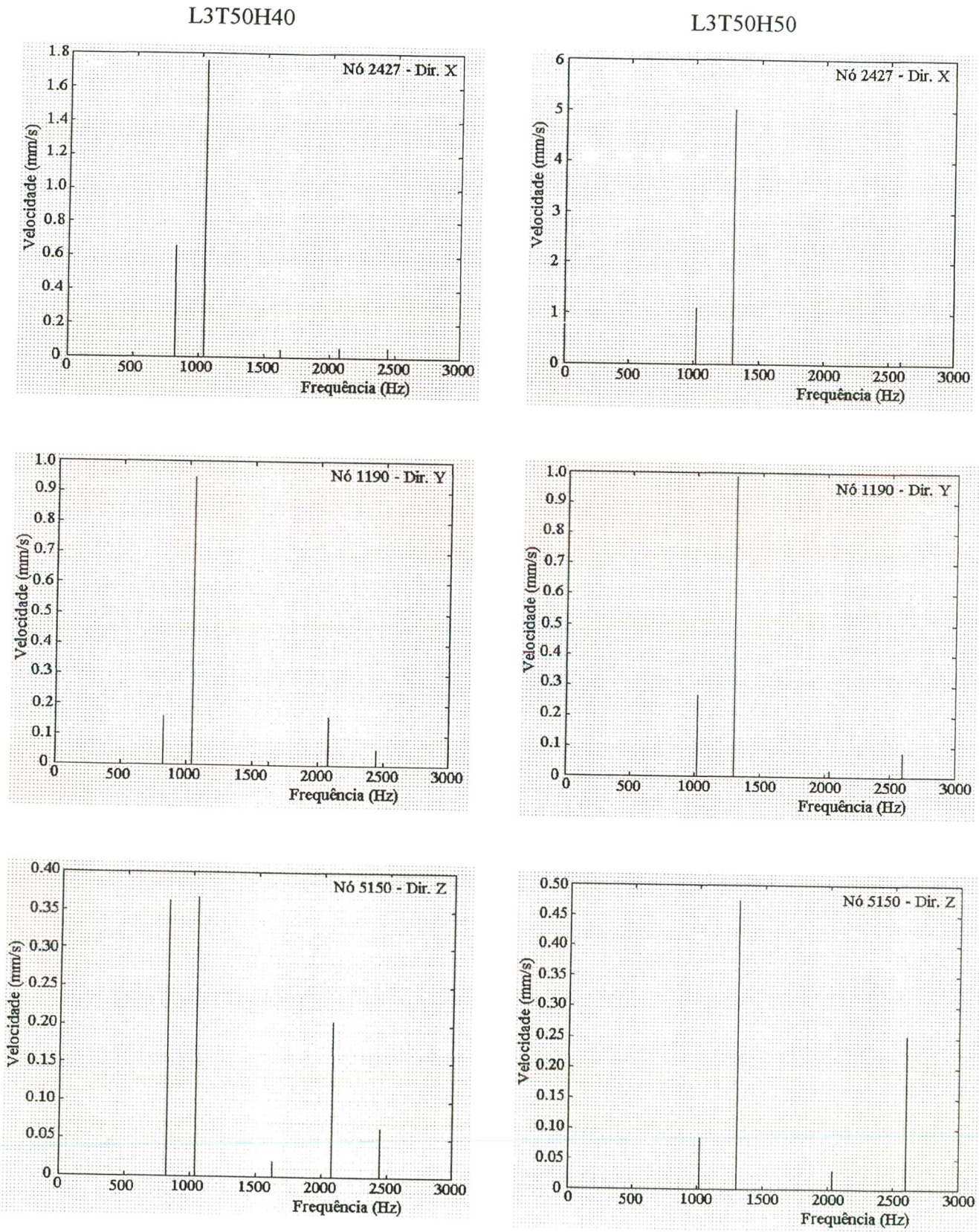


Figura 7.9 – Amplitude de velocidade, em nós sobre a superfície do alojamento, para condição de 3ª marcha – 50% de T – C.C Fixa-Livre.



crítica do que a rotação de 2400 rpm, para a condição de 3ª marcha e 50% do torque máximo de projeto da caixa de engrenagem, e que a rotação de 1800 rpm é mais crítica do que a de 2400 rpm, para a condição de 1ª marcha e 100% do torque máximo de projeto. Por outro lado, ainda com base nestas figuras, é possível inferir o efeito provocado pela mudança nas condições de contorno do problema, uma vez que os espectros de velocidade, para uma mesma condição operacional e condições de contorno distintas, apresentam diferenças visíveis e que estão relacionadas ao fato de que a mudança da condição de contorno do problema altera sua base modal e, em consequência, sua resposta forçada.

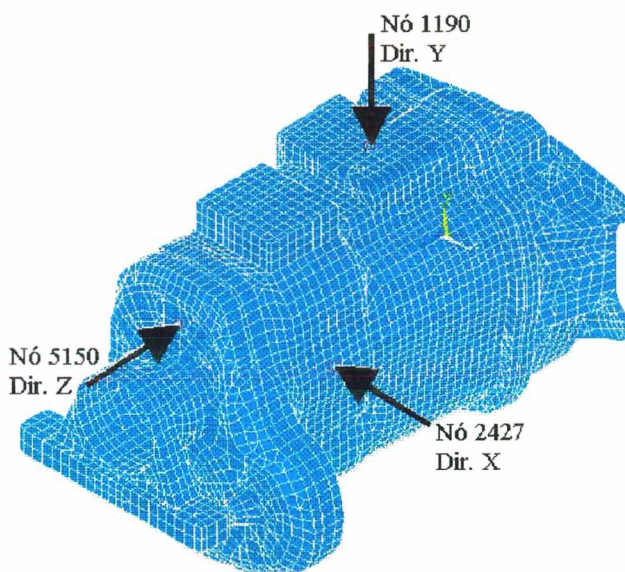


Figura 7.10 – Posicionamento dos nós sobre a superfície do alojamento

## 7.5 – PREDIÇÃO DOS PARÂMETROS ACÚSTICOS

A predição dos parâmetros acústicos da caixa de engrenagem, utilizou a malha acústica selecionada no Capítulo 6 e foi feita através do método de elementos de contorno indireto no SYSNOISE V. 5.4, para cada uma das condições operacionais listadas nas tabelas 7.2 e 7.3.

O problema de radiação acústica foi resolvido para condições de contorno de velocidade, as quais foram geradas nos nós correspondentes à superfície do alojamento, tendo-se por base os resultados de deslocamentos obtidos na análise harmônica realizada anteriormente no ANSYS. Primeiramente, foram obtidos os resultados primários, que no método indireto é o *Double Layer Potencial* para a superfície do modelo, e em seguida foram obtidos a potência sonora radiada e a



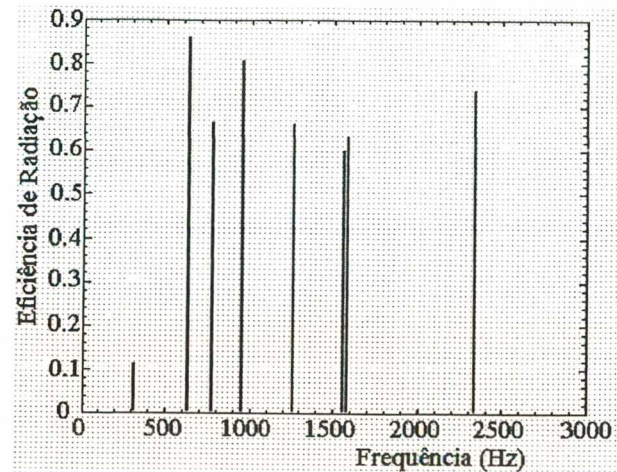
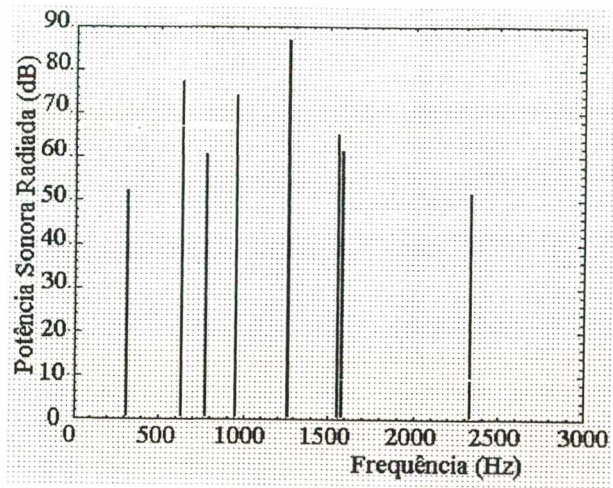
eficiência de radiação em cada uma das frequências de engrenamento e seus harmônicos, dentro da faixa de frequência de 0 a 3kHz. As Fig. 7.11(a) a 7.11(d) mostram os valores de potência sonora radiada e eficiência de radiação, para cada uma das condições operacionais simuladas.

Os valores de potência sonora radiada estimados mostram que a modificação da condição de contorno (restrição de graus de liberdade) do problema apresenta uma modificação de comportamento que depende das condições operacionais consideradas. Assim, tomando-se como referência a condição operacional de 1ª marcha, 100 % de T e rotação de 1800 rpm (identificada por F1T100H30 e L1T100H30), percebe-se que para as frequências de 316,2 Hz (harmônico fundamental relativo as engrenagens de 1ª marcha), 632,4 Hz (segundo harmônico de 1ª marcha), 1264,8 Hz (quarto harmônico de 1ª marcha) e 2340 Hz (terceiro harmônico relativo as engrenagens neutras) a potência sonora radiada aumenta quando se dá mais liberdade de movimento para a fixação dianteira da caixa de engrenagem (condição de contorno Fixa-Livre - L1T100H30). Por outro lado, ainda considerando a identificação L1T100H30, para a frequência de 780 Hz (harmônico fundamental relativo as engrenagens neutras) ocorre uma diminuição no valor da potência sonora radiada e as frequências 948,6 Hz (terceiro harmônico de 1ª marcha), 1560 Hz (segundo harmônico das engrenagens neutras) e 1581 Hz (quinto harmônico de 1ª marcha) não apresentam mudança perceptível. A diferença máxima é da ordem de 4 dB, no harmônico fundamental das engrenagens de 1ª marcha (316,2 Hz), e de 2 dB no quarto harmônico das engrenagens de 1ª marcha, onde a potência sonora radiada é máxima. Mudando a rotação de 1800 rpm para 2400 rpm, as frequências de engrenamento e seus harmônicos apresentam um comportamento um pouco diferente do caso anterior, devido à mudança que ocorre em seus valores, mas a diferença máxima entre os valores de potência sonora radiada continua a ser de aproximadamente 4 dB, agora para a frequência de 421,6 Hz (harmônico fundamental de 1ª marcha), e de 2 dB para a frequência de 1264,8 Hz, que corresponde ao quarto harmônico de 1ª marcha, onde a potência sonora radiada é máxima.

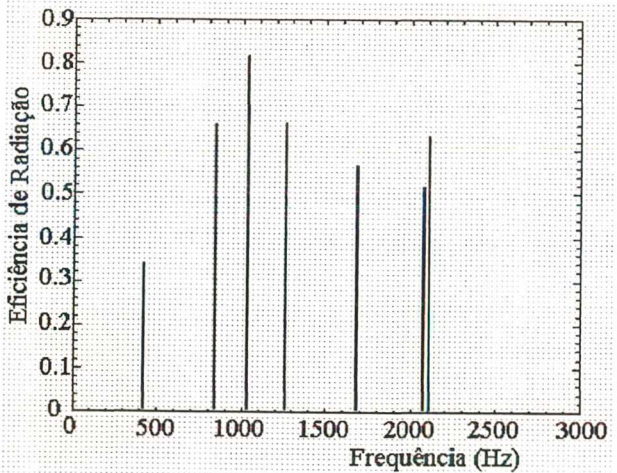
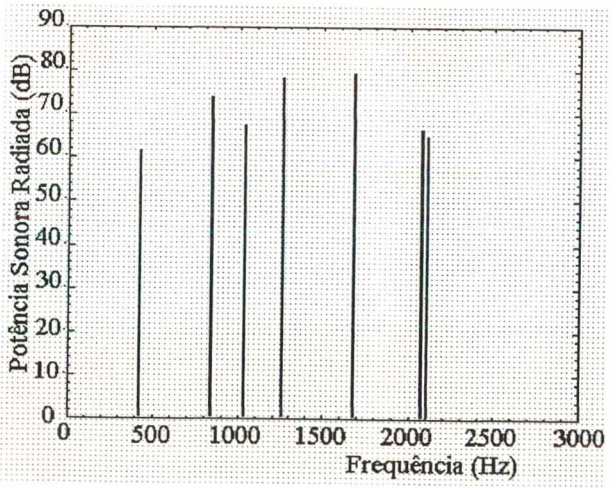
Uma outra observação que pode ser feita é a diferença significativa, que ocorre entre os valores de potência sonora radiada, quando se modifica o torque aplicado mantendo-se inalterado os demais parâmetros. Por exemplo, comparando-se as predições F1T100H30 e F1T50H30 vemos que a potência sonora radiada máxima, para cada um destes casos, ocorrem em frequências diferentes, ou seja 1264,8 Hz (quarto harmônico de 1ª marcha) para a predição F1T100H30 e 780 Hz (harmônico fundamental das engrenagens neutras) para a predição F1T50H30, sendo que a potência sonora radiada na frequência de 1264,8 Hz é 14 dB superior para a predição F1T50H30 e na frequência de 780 Hz é 17 dB superior para a predição



F1T100H30



F1T100H40



F1T50H30

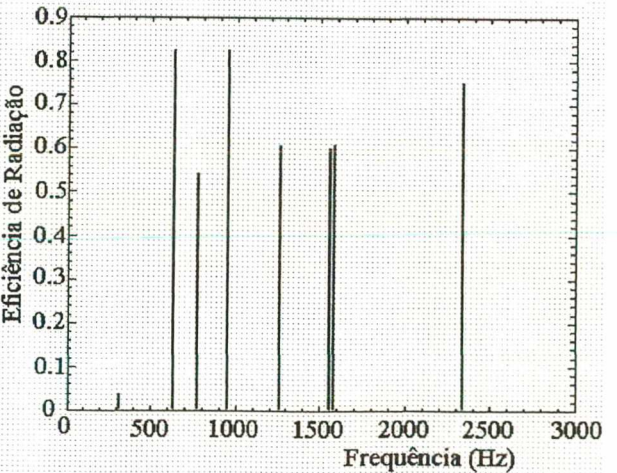
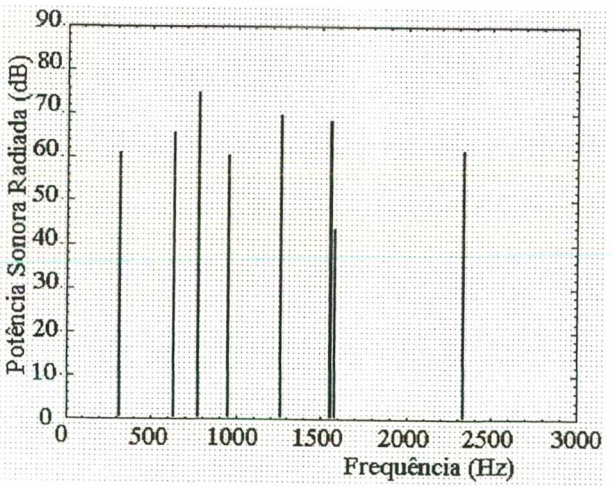
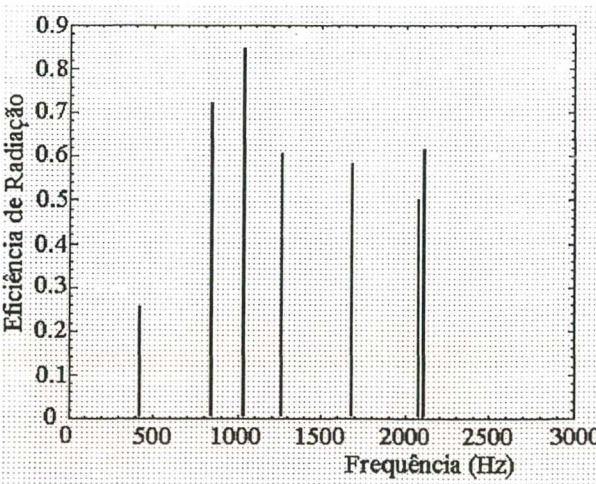
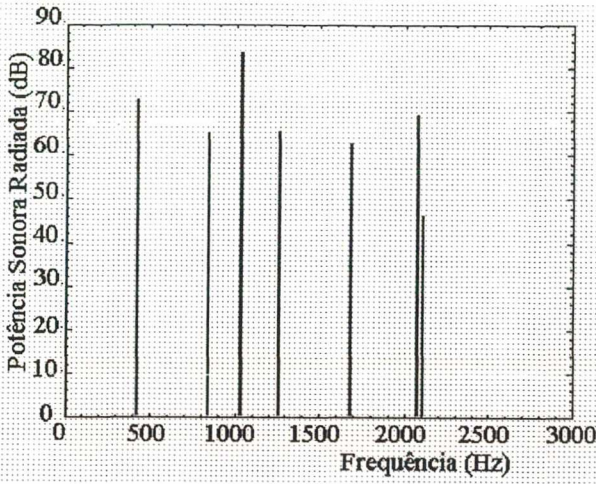


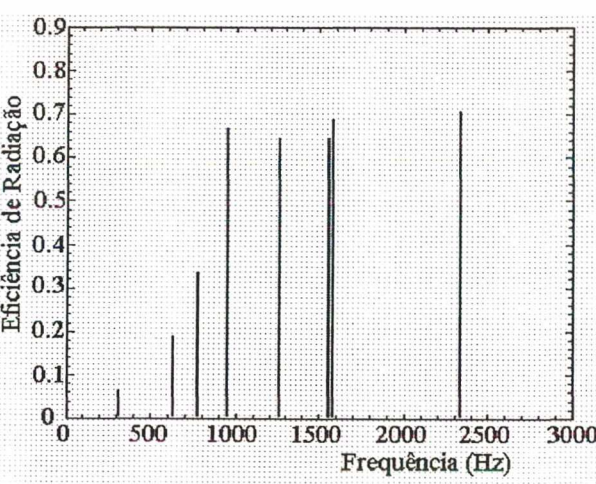
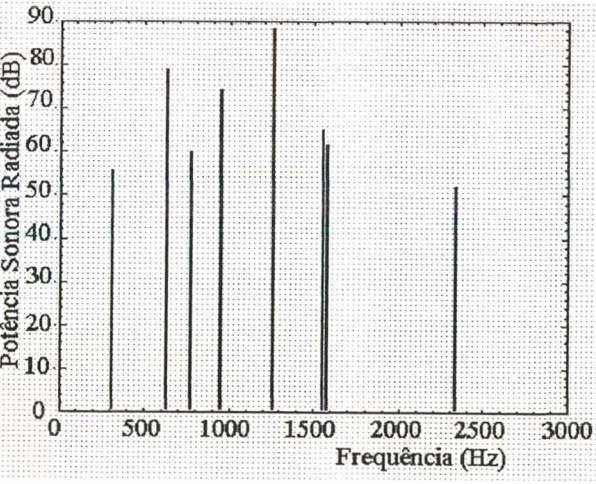
Figura 7.11(a) – Espectro discreto de potência sonora radiada e eficiência de radiação.



F1T50H40



L1T100H30



L1T100H40

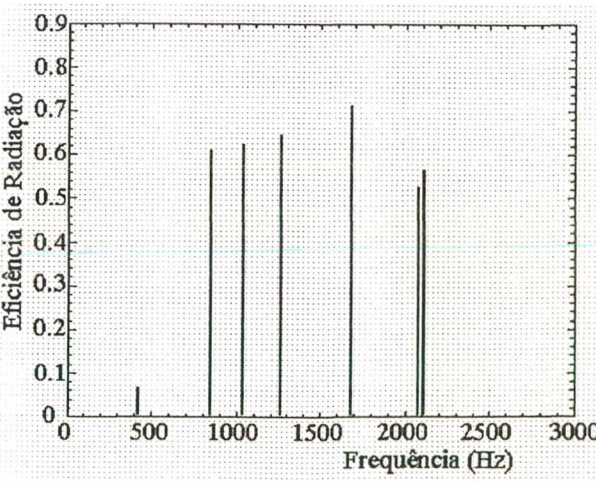
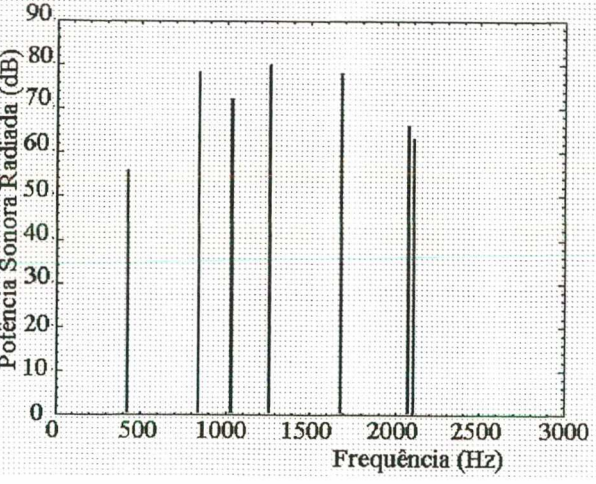
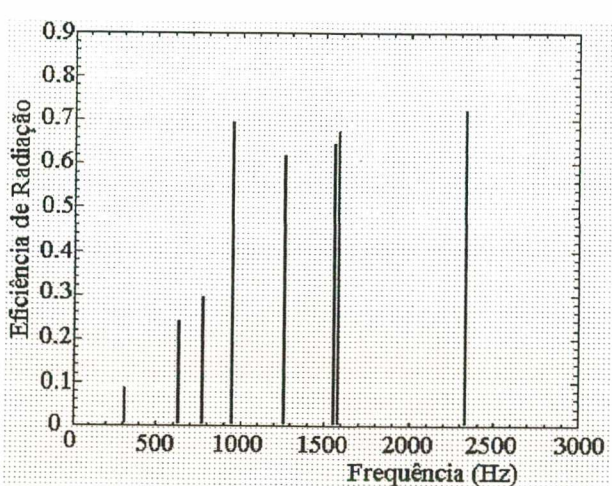
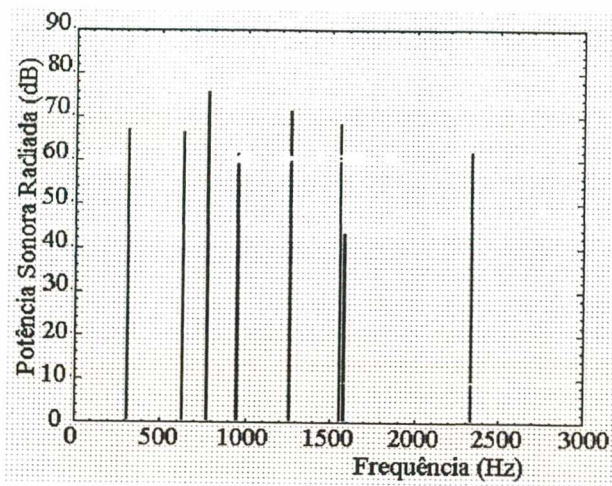


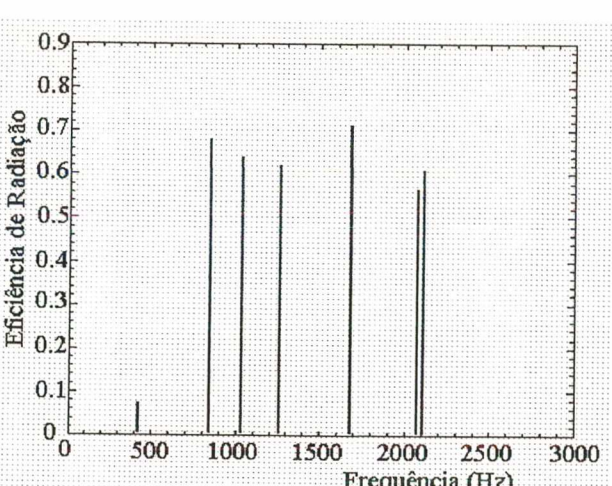
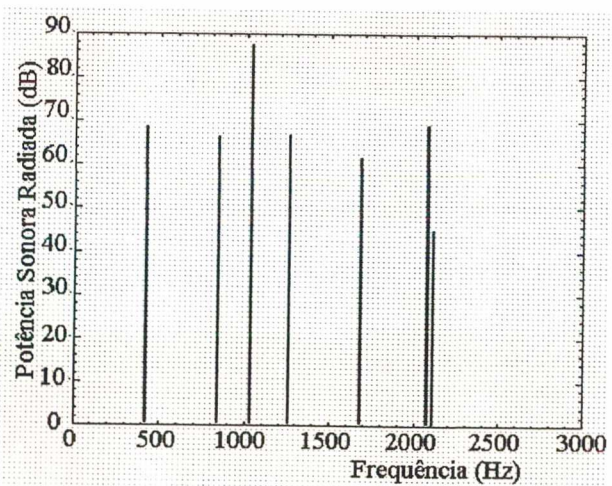
Figura 7.11(b) – Espectro discreto de potência sonora radiada e eficiência de radiação.



L1T50H30



L1T50H40



F3T50H40

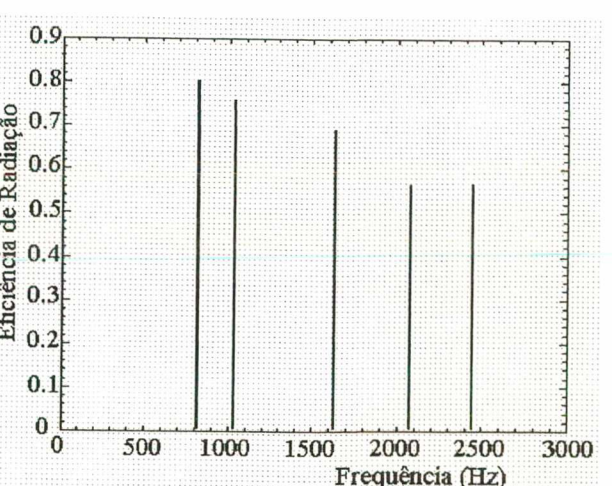
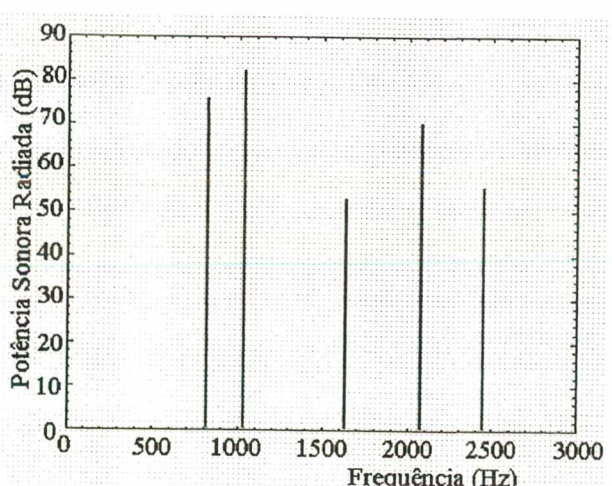
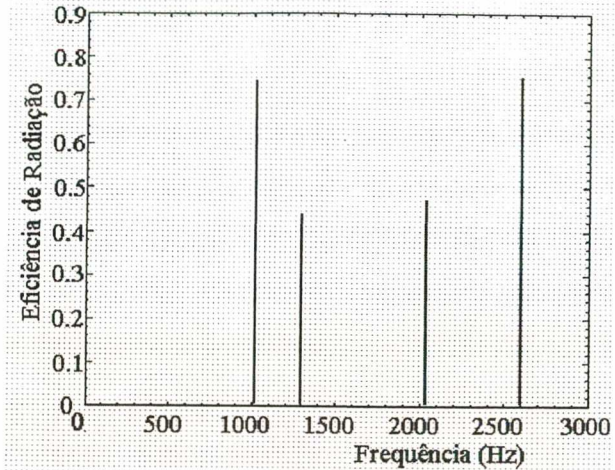
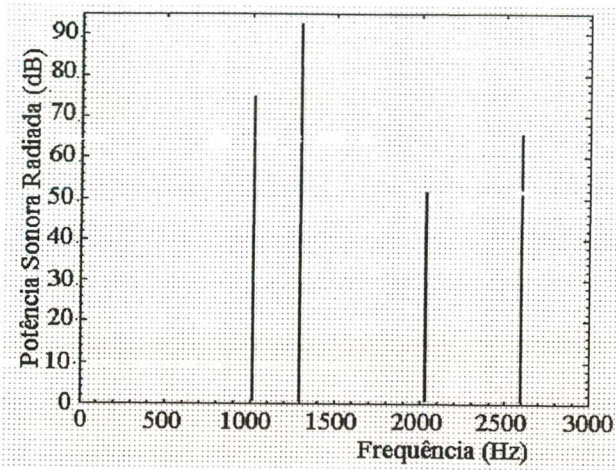


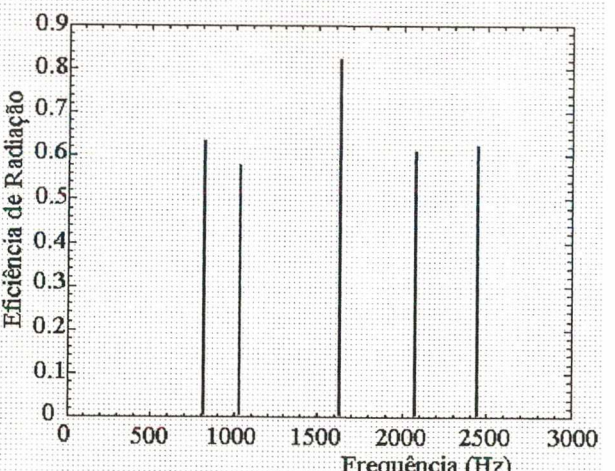
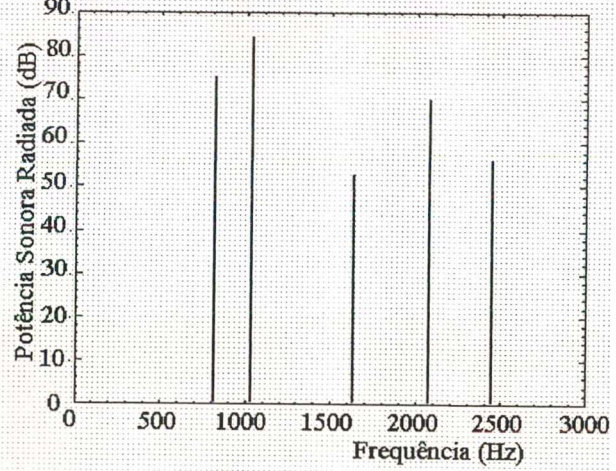
Figura 7.11(c) – Espectro discreto de potência sonora radiada e eficiência de radiação.



F3T50H50



L3T50H40



L3T50H50

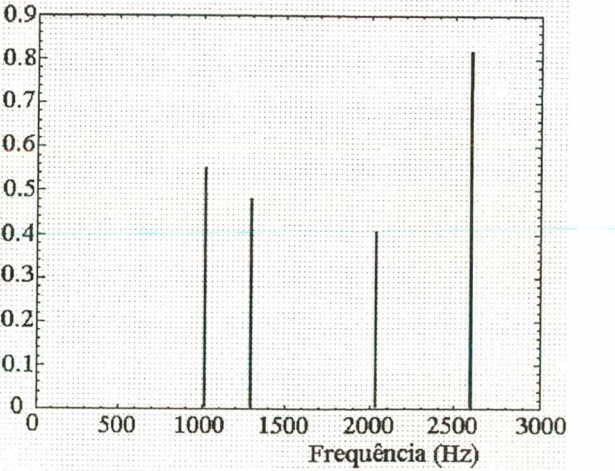
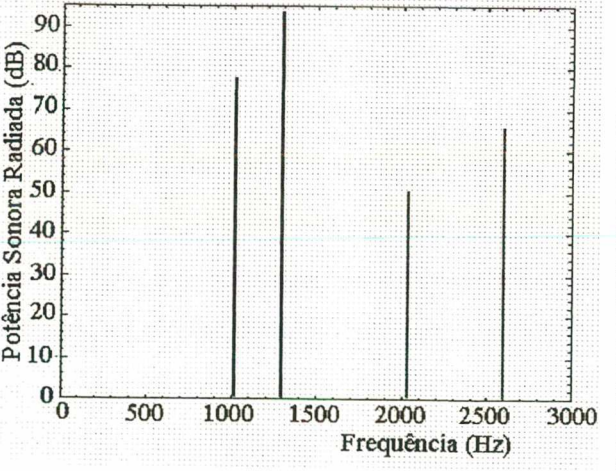


Figura 7.11(d) – Espectro discreto de potência sonora radiada e eficiência de radiação.



F1T100H30. Esta tendência é a mesma quando se estabelece a comparação entre as outras predições, principalmente, no que diz respeito à diferença entre os valores de potência sonora, na frequência em que este parâmetro é máximo, a qual assume um valor médio de 16 dB.

No que diz respeito à eficiência de radiação, pode-se dizer que o comportamento está de acordo com a teoria, uma vez que para as baixas frequências o valor deste parâmetro é baixo e aumenta, para frequências mais altas, tendendo à unidade. Por outro lado, para nem uma das predições este valor foi superior à unidade e os resultados obtidos permitem estabelecer em que frequência a energia mecânica vibratória é melhor aproveitada para a radiação sonora.

Para permitir uma visualização da distribuição de pressão sonora na circunvizinhança do alojamento, uma malha de pontos de campo foi elaborada, constituída de 930 pontos distribuídos sobre a superfície de um hiperbolóide de duas secções. Este hiperbolóide, cujo centro geométrico coincide com o centro geométrico do alojamento, apresenta uma seção circular de raio igual a 0,45 m na parte central e de 0,5 m nas extremidades e cobre todo o comprimento da caixa de engrenagem. As Fig. 7.12(a) e 7.12(b) apresentam a malha de pontos de campo, sobre a qual é mapeada a distribuição de pressão sonora, para as condições operacionais simuladas e harmônicos das frequências de engrenamento em que a potência sonora radiada é mais significativa. Nestas figuras é possível verificar a diferença nos níveis de pressão sonora e na sua distribuição sobre a superfície do hiperbolóide, para cada uma das frequências apresentadas.

Outra informação que é possível ser obtida diz respeito à diretividade do som radiado pela caixa de engrenagem. Para tal, um padrão de diretividade é calculado e mostrado em um diagrama bidimensional ou em uma forma tridimensional que inclui a malha acústica, conforme pode ser observado nas Fig. 7.13 a 7.18. A construção destes diagramas está baseada em uma malha de pontos de campo, com um total de 360 pontos, posicionados, de um em um grau, sobre uma circunferência de 1 m de raio e cujo centro coincide com o centro geométrico da caixa de engrenagem. Fica claro, destas figuras, que o padrão de diretividade é alterado de acordo com as condições operacionais e que as partes laterais do alojamento contribuem mais significativamente que as tampas dianteira e traseira para a radiação sonora da caixa de engrenagem.

Finalmente, é importante comentar sobre o tempo computacional gasto na fase de pré-processamento e de solução do modelo acústico, o qual está relacionado às características da malha acústica, quantidade de frequências em que se deseja determinar os parâmetros acústicos e do *hardware* usado. A tabela 7.4 apresenta uma comparação entre um Pentium II-400 MHz, com 256 Mb de RAM e *winchester* de 6 Gb, e um Pentium III-500 MHz, com 256 Mb de RAM



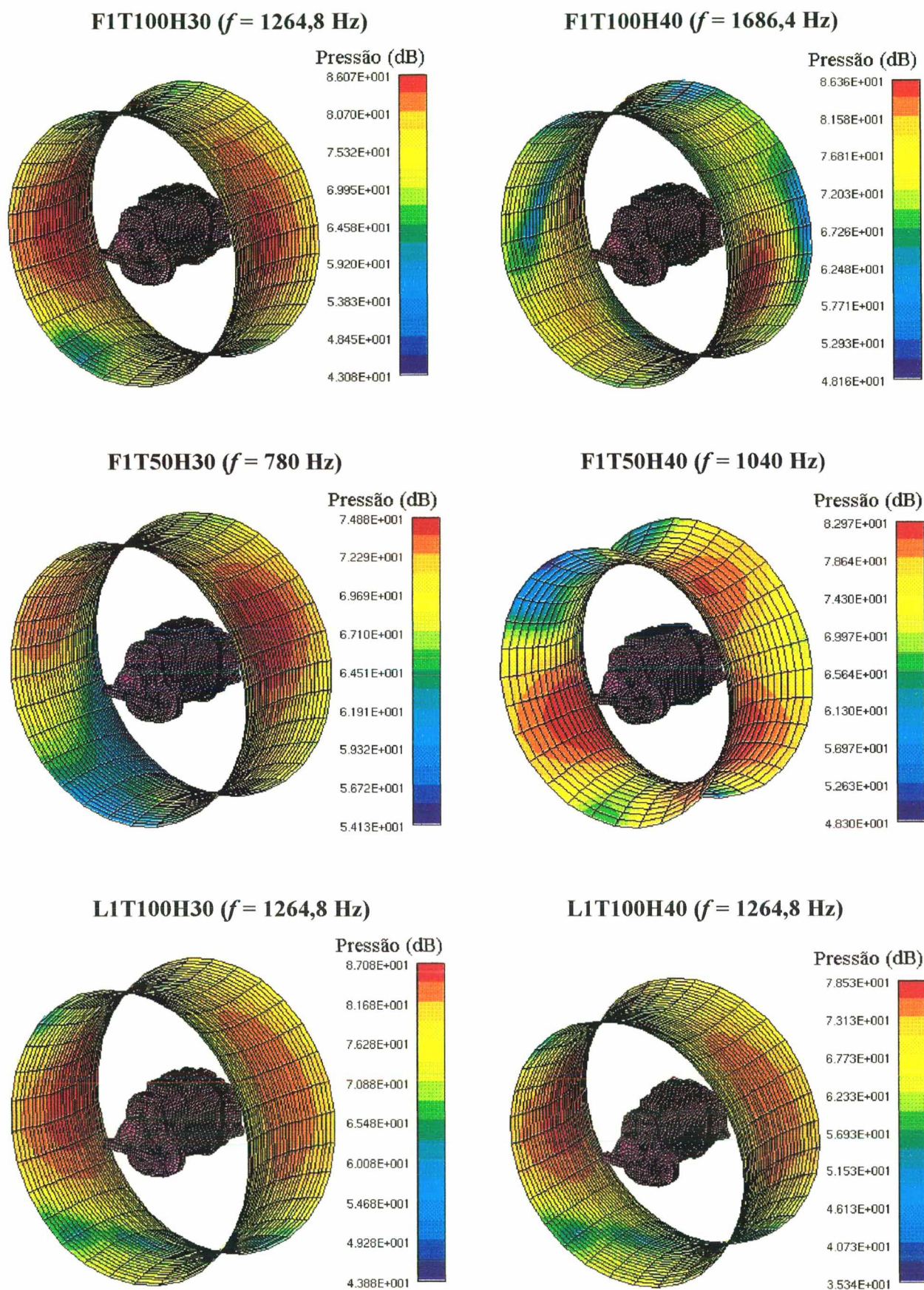


Figura 7.12(a) – Mapeamento de pressão sonora em condições operacionais distintas.



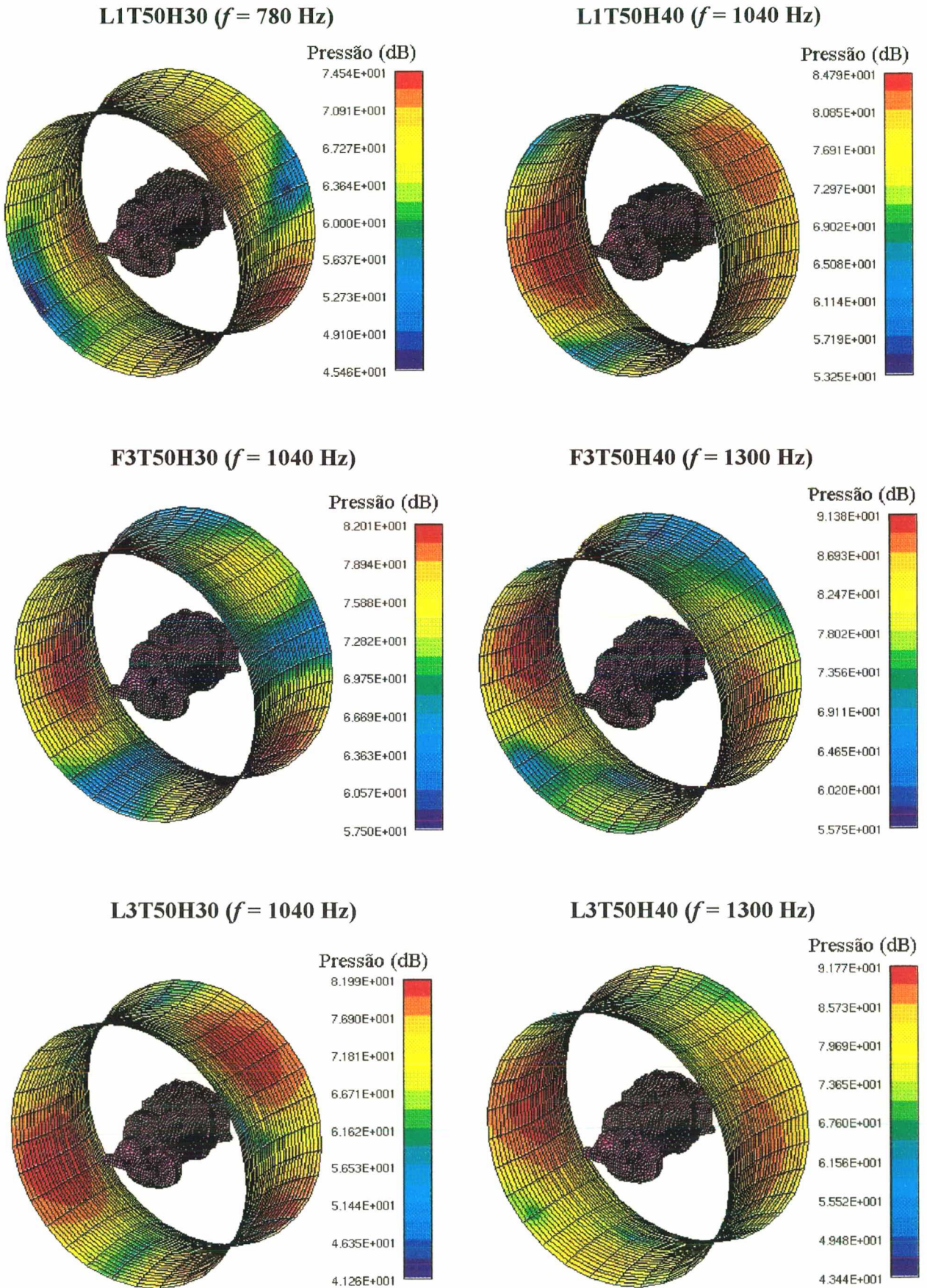


Figura 7.12(b) – Mapeamento de pressão sonora em condições operacionais distintas.



e *winchester* de 13 Gb, para um total de oito harmônicos processados. Por outro lado, considerando que o modelo acústico completo requer 7.931 equações para desenvolver uma simulação, o espaço mínimo requerido no *winchester* para arquivos temporários é de aproximadamente 2,2 Gb.

Tabela 7.4 – Tempo de processamento do modelo acústico.

| MICROCOMPUTADOR       | TEMPO MÉDIO (h:min:s) |          |          |
|-----------------------|-----------------------|----------|----------|
|                       | Pré-Processamento     | Solução  | Total    |
| Pentium II – 400 MHz  | 00:33:21              | 51:51:15 | 52:24:36 |
| Pentium III – 500 MHz | 00:18:40              | 42:35:33 | 42:54:13 |

7.6 – COMENTÁRIOS FINAIS

Neste capítulo foi apresentado o modelo global da caixa de engrenagem e a metodologia de predição dos parâmetros vibro-acústicos, através do uso combinado dos métodos de elementos finitos e elementos de contorno.

As simulações desenvolvidas, para condições distintas de operação, permitiram inferir a influência de alguns parâmetros no comportamento vibro-acústico da caixa de engrenagem. Assim, ficou claro que as condições de contorno usadas modificam a resposta do sistema como era esperado, mas sua influência não é tão significativa quanto o efeito da modificação do valor do torque, uma vez que a diferença máxima no resultado final de potência sonora radiada é, em média, de aproximadamente 4 dB e de 16 dB, respectivamente. Por outro lado, a mudança na rotação do eixo piloto altera as frequências de engrenamento, bem como seus harmônicos, o que leva a uma mudança da resposta forçada da caixa de engrenagem e aponta as rotações de 1800 rpm e 3000 rpm como sendo as que levam a uma maior radiação de potência sonora nas condições de 1ª e 3ª marcha, respectivamente.

As possibilidades de pós-processamento do SYSNOISE permitiu, ainda, o mapeamento de pressão sonora na vizinhança do alojamento e os padrões de diretividade mostraram ser as laterais do mesmo as superfícies que mais contribuem para a radiação sonora.

Finalmente, embora o modelo seja de tamanho significativo, o tempo de processamento é plenamente aceitável para o tipo de *hardware* usado.

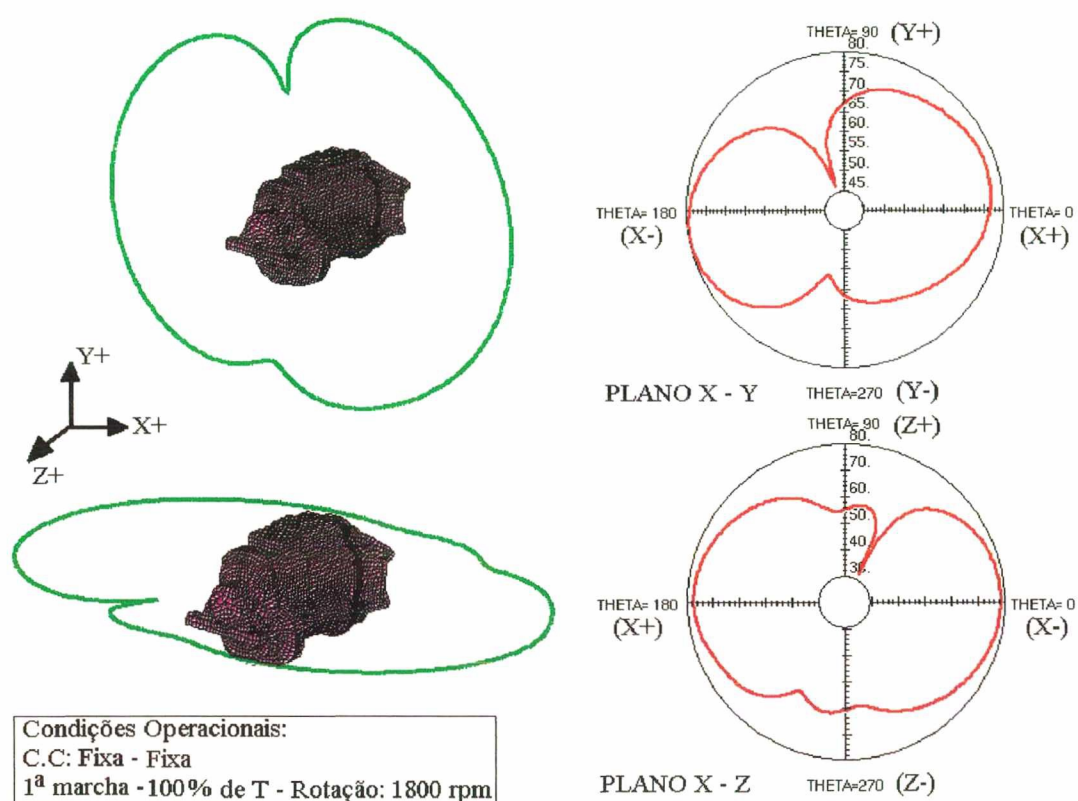


Figura 7.13 – Diagramas de diretividade ( $f = 1264,8 \text{ Hz}$  – F1T100H30).

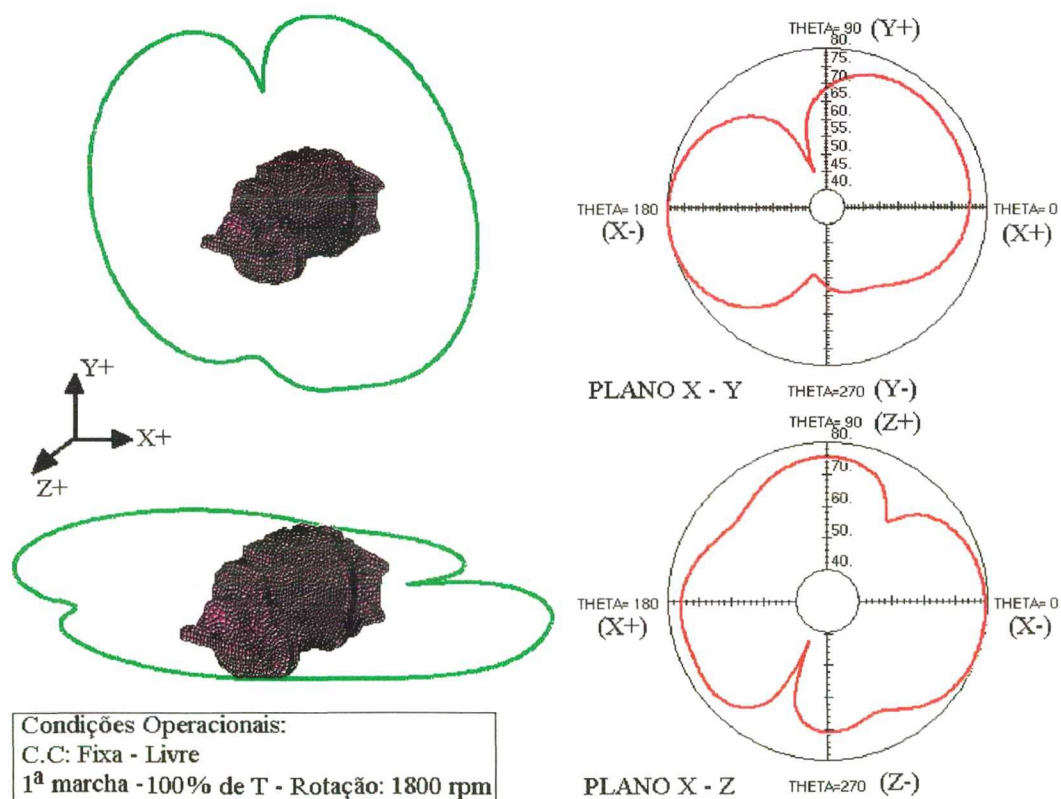


Figura 7.14 – Diagramas de diretividade ( $f = 1264,8 \text{ Hz}$  – L1T100H30).

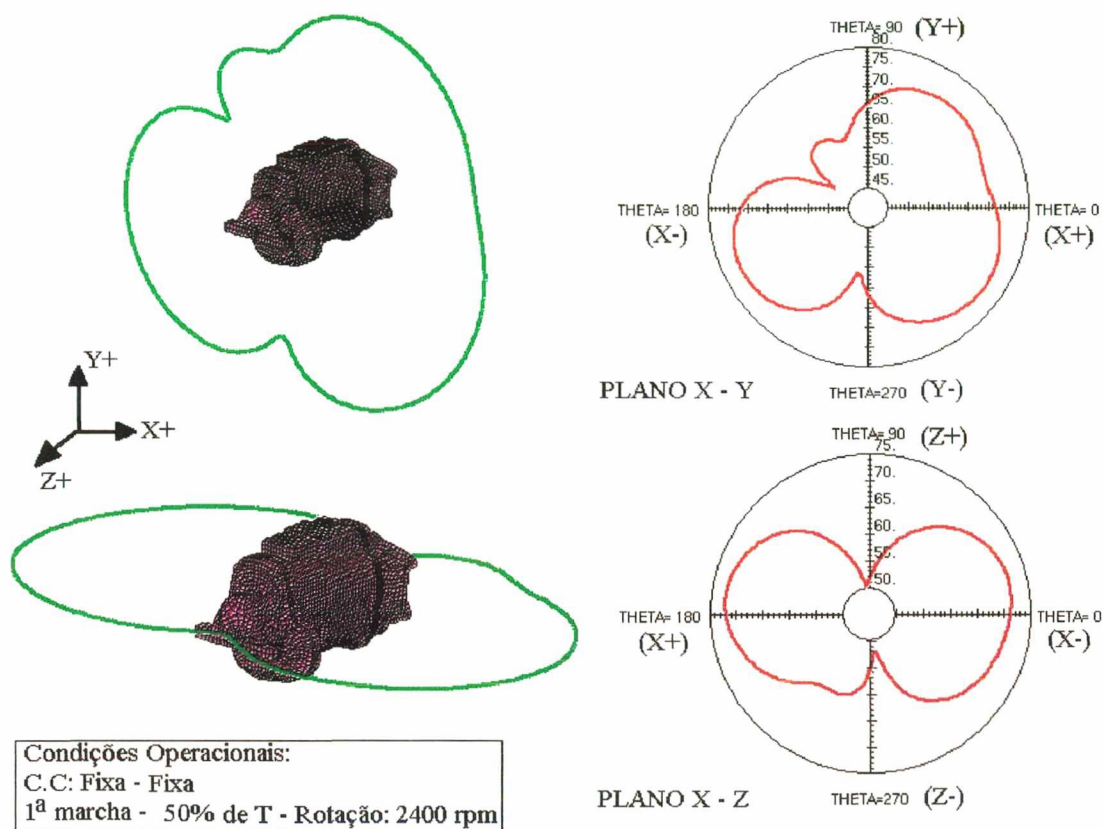


Figura 7.15 – Diagramas de diretividade ( $f = 1040$  Hz – F1T50H40).

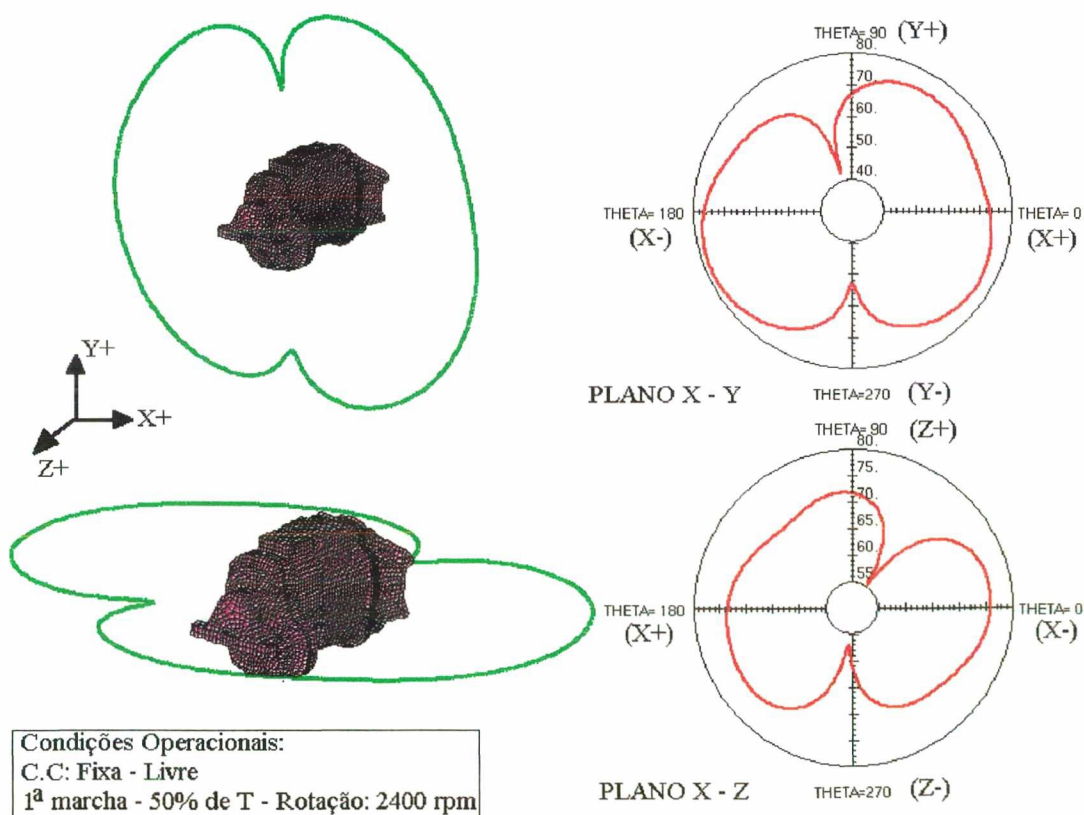
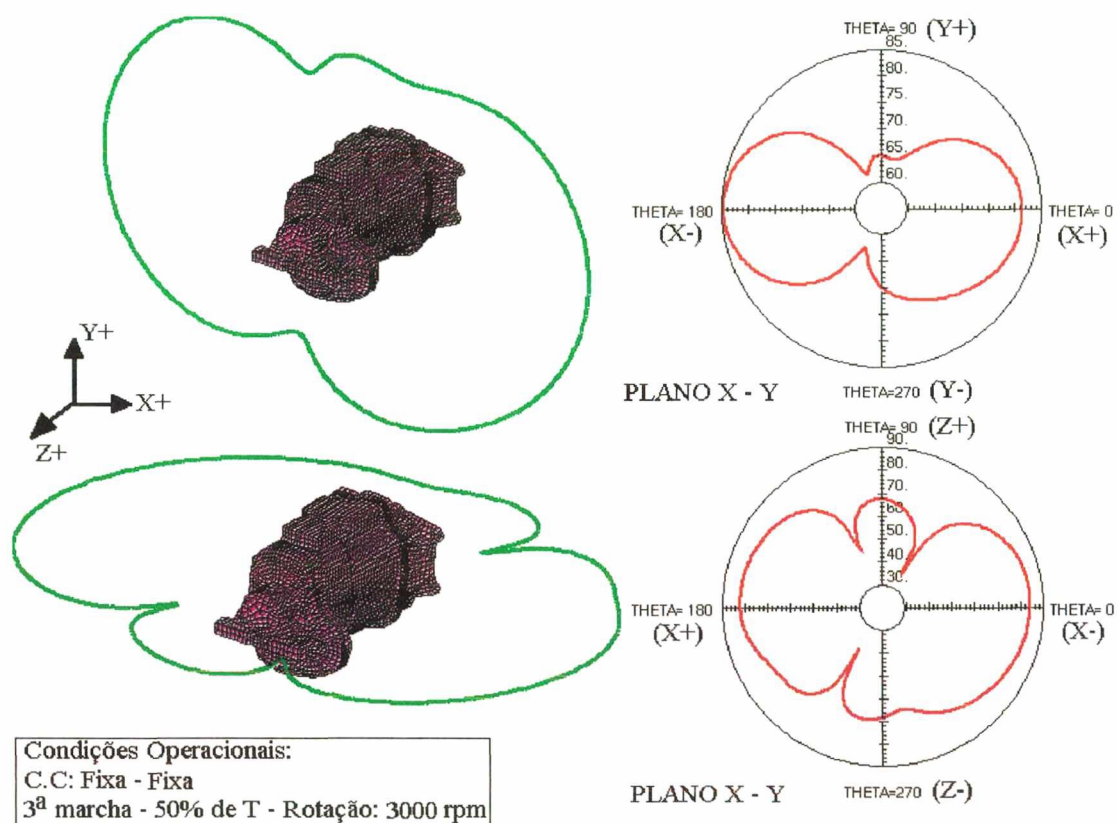
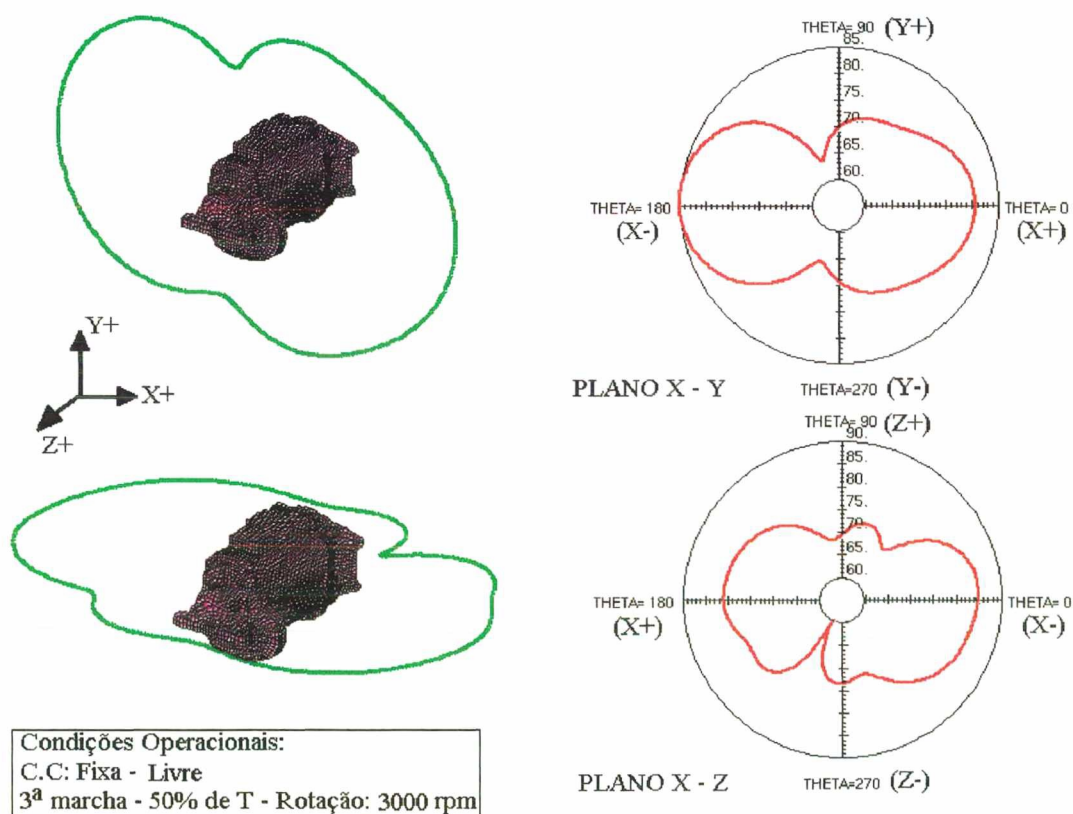


Figura 7.16 – Diagramas de diretividade ( $f = 1040$  Hz – L1T50H40).



Figura 7.17 – Diagramas de diretividade ( $f = 1300$  Hz – F3T50H50).Figura 7.18 – Diagramas de diretividade ( $f = 1300$  Hz – L3T50H50).



## CAPÍTULO 8

### CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

#### 8.1 – CONCLUSÕES

Neste trabalho, o objetivo geral foi o de desenvolver uma metodologia de modelagem que permitisse fazer previsões vibro-acústicas de caixa de engrenagem, tendo por base os métodos de elemento finito e elemento de contorno, uma vez que a maior parte dos esforços de pesquisa com este objetivo teve caráter experimental. A aplicação destes métodos, em caixa de engrenagem, apresenta certa dificuldade devido à complexidade da geometria dos alojamentos e pela necessidade de se modelar componentes que, em geral, apresentam um comportamento não-linear.

Embora o problema seja complexo, um conjunto de hipóteses simplificadoras foram assumidas e uma formulação matemática consistente foi usada de modo a permitir a representação linear de componentes com comportamento não-linear, de tal modo que a base teórica disponível para sistemas lineares pudesse ser usada. Assim, através da teoria de contato de Hertz, juntamente com o procedimento de linearização, foram desenvolvidas expressões analíticas para a determinação de uma matriz de rigidez generalizada capaz de permitir uma representação tridimensional da rigidez do mancal de elementos rolantes. Por outro lado, na concepção do modelo de um engrenamento típico, a separação dos dentes não foi considerada e as engrenagens foram modeladas por um par de discos rígidos conectados por uma mola de rigidez constante e igual ao valor médio da rigidez de engrenamento. Embora esta rigidez tenha sido considerada constante, o efeito de excitação variável, característica do engrenamento, foi considerado através do uso de uma excitação de deslocamento representada pelo erro de transmissão estático. Assim, esta representação permitiu a definição de uma matriz de rigidez generalizada que possibilita o acoplamento entre as vibrações de torção e flexão dos eixos engrenados, facilitando a concepção do modelo de elementos finitos do sistema de eixos engrenados.

O sistema de eixos engrenados foi modelado incorporando as representações descritas no parágrafo anterior, bem como uma representação dos eixos por elementos de vigas uniaxiais, com capacidade de tração, compressão, torção, flexão e seis graus de liberdade por nó. Neste contexto, uma análise de vibração forçada foi possível usando a auto excitação do engrenamento,

que foi representada pelo espectro discreto de Fourier, do produto entre o erro de transmissão estático e a rigidez de engrenamento, com componentes de frequência correspondentes às frequências de engrenamento e seus respectivos harmônicos.

Para completar o modelo global da caixa de engrenagem, a superfície do alojamento foi representada por elementos de casca, com capacidade de membrana e flexão e seis graus de liberdade por nó, e os requisitos de rigidez localizada foram simulados através de elementos de viga uniaxiais, com capacidade de tração, compressão, torção, flexão e possibilidade de se deslocar os nós das extremidades do elemento do seu eixo centroidal, o que permite considerar o efeito de compressão axial que se manifesta devido ao fato do eixo neutro da viga não estar contido na superfície neutra sobre a qual os elementos de casca são mapeados.

Finalmente, uma malha de elementos de contorno da caixa de engrenagem foi construída e o problema de não unicidade de solução foi equacionado através de uma malha de elementos de impedância singular, de tal modo que o problema de radiação sonora foi resolvido fornecendo uma predição de parâmetros acústico da caixa de engrenagem para condições operacionais distintas.

A formulação matemática da matriz de rigidez generalizada, desenvolvida para representar os mancais de elementos rolantes, permite incorporar, na análise dinâmica de sistemas de eixos engrenados, efeitos de rigidez que são normalmente negligenciados e, assim, possibilita que a transmissão de vibração através dos mancais seja simulada de modo mais realista, uma vez que viabiliza o acoplamento entre os movimentos de flexão do eixo e do alojamento, levando à obtenção de uma previsão melhor do campo de velocidade na superfície do alojamento, o qual é responsável pela radiação acústica da caixa de engrenagem. A aplicação desta formulação, para o sistema de eixos da caixa de engrenagem, comprova a importância dos coeficientes de rigidez  $k_{\alpha_x \alpha_x}$  e  $k_{\alpha_y \alpha_y}$ , bem como aqueles fora da diagonal principal da matriz  $\mathbf{K}_m$ , uma vez que estes coeficientes apresentam valores significativos quando comparados com os coeficientes de rigidez nas direções radial e axial do mancal. Por outro lado, estes coeficientes de rigidez são bastantes influenciados pelas condições operacionais simuladas, ou seja, torque aplicado e condição de marcha engrenada.

A metodologia de cálculo para determinação da rigidez de engrenamento e erro de transmissão estático possibilita estudar a variação destes parâmetros segundo o torque aplicado e tipo de perfil do dente da engrenagem. Para as simulações apresentadas no corpo deste trabalho, foi possível inferir que a rigidez de engrenamento média apresenta uma tendência de crescimento

quando o torque aplicado aumenta e de decaimento quando altera-se o perfil de dente evolvental, através de modificações de perfil e de *Lead*. Outra informação que merece destaque é a de que um espectro discreto de Fourier, com apenas cinco harmônicos da frequência de engrenamento, possibilita uma representação muito boa para a variação temporal do erro de transmissão estático.

A previsão das reações de apoio nos mancais, a partir dos modelos de elementos finitos do sistema de eixos engrenados, mostra que a modificação de perfil de dente adotada minimiza significativamente o efeito da auto excitação do engrenamento sobre as reações nos mancais, para uma situação de carga que corresponde a 100% do torque líquido de projeto da caixa de engrenagem, quando comparado com a condição de dentes com perfil evolvental. Entretanto, para situação de carga mais leve, como é o caso de um carregamento correspondente a 50 % do torque líquido de projeto, esta tendência não se manifesta de forma expressiva e, para alguns harmônicos da frequência de engrenamento, os valores de reação nos mancais passam a ser mais altos do que aqueles determinados para engrenagens com perfil evolvental. Esta tendência é a mesma para a condição de 1ª e 3ª marcha e pode ser explicada pelo fato de que a quantidade de alívio de topo especificada permite cargas elevadas e, portanto, nas cargas altas as deflexões dos dentes são tais que tendem a cancelar os efeitos de alívio de topo, o que não ocorre em cargas baixas.

A metodologia usada para concepção da malha de elementos finitos do alojamento da caixa de engrenagem mostrou-se adequada, uma vez que a comparação dos resultados da análise modal numérica com os da análise modal experimental apontaram para uma boa concordância entre os dois modelos.

O procedimento de modelagem para determinação de parâmetros acústicos usando os métodos de elementos finitos e elementos de contorno, a partir de *softwares* comerciais, foi testado através da solução do problema de radiação de uma placa quadrada em *Baffle* infinito, para o qual existe solução analítica disponível, bem como o problema de radiação sonora de motores elétricos, para o qual foram feitas comprovações experimentais. Os resultados para o problema da placa quadrada, apresentados no Capítulo 6, e para os motores elétricos, apresentados nas referências [10] e [64], permitiram validar o procedimento de modelagem e atestar a eficiência dos pacotes computacionais usados.

O método de elementos de contorno, como implementado no SYSNOISE, mostrou-se uma ferramenta poderosa para realizar a predição da resposta acústica da caixa de engrenagem, uma vez que é possível obter-se informações de grande interesse prático, como por exemplo

potência sonora radiada, eficiência de radiação, mapeamento de pressão sonora na circunvizinhança da caixa de engrenagem e diagramas de diretividade associados a cada uma das frequências do espectro de resposta. Entretanto algumas limitações se apresentam no uso deste método, como por exemplo o tempo de processamento, que aumenta significativamente para maiores resoluções em frequência e refino da malha de elementos de contorno (malha acústica) e, também, a indeterminação da resposta nas frequências naturais do problema interno associado, que implica na necessidade da definição de uma malha de elementos de impedância singular, para o método indireto, que leva à necessidade da definição iterativa do número de elementos da malha e seu posicionamento no interior do contorno determinado pela superfície de radiação sonora. Estas limitações foram contornadas, limitando-se a faixa de frequência de análise de 0 a 3 kHz e selecionando-se uma malha acústica compatível, com base em uma comparação entre resultados obtidos para configurações distintas da malha de elementos de impedância singular, que permitiu eliminar o problema de não unicidade de solução (problema de frequências irregulares).

As simulações desenvolvidas para a predição de parâmetros acústico, com base nas condições operacionais assumidas, permitiu inferir que as modificações de potência sonora radiada são mais sensíveis à mudança de torque de operação do que às condições de contorno imposta pela fixação da caixa de engrenagem, bem como apontou as rotações de operação de 1800 rpm e 3000 rpm como sendo as que levam a um valor máximo do nível de potência sonora radiada nas condições de 1ª e 3ª marcha, respectivamente. Por outro lado, os valores de nível de potência sonora radiada preditos não ultrapassam o valor de 92 dB, para o espectro discreto baseado nas frequências de engrenamento e seus harmônicos, o que estabelece valores na mesma ordem de grandeza dos resultados experimentais obtidos por Lalor et al. [46], muito embora o experimento tenha sido realizado para uma caixa de engrenagem de uso veicular diferente e o espectro de potência sonora seja apresentado em terço de oitava. Entretanto, resultados experimentais obtidos para caixas de engrenagens usadas em carros de passeio médio e pequeno por Rust et al. [78], com base em um parâmetro denominado por eles de eficiência acústica (relação entre força de excitação e pressão sonora), revelam uma propriedade comum no comportamento acústico de caixas de engrenagem diferentes, o que parece estar relacionado a conceitos comuns de projeto.

Os padrões de diretividade determinados pela simulação mostram claramente a predominância das superfícies laterais da caixa de engrenagem para a radiação sonora, em relação as partes superior e inferior, bem como em relação as tampas. É possível perceber, ainda,



que a lateral esquerda da caixa é mais direcional do que a lateral direita (lateral próxima a terceira engrenagem intermediária da ré), bem como estabelece em sua circunvizinhança níveis de pressão sonora superiores, como pode ser observado nas Fig. 7.14 a 7.18. Este fato, é importante de ser considerado uma vez que a tendência moderna de verificação de ruído em veículos é o teste denominado de *by-pass noise*, no qual o microfone é direcionado para a lateral do veículo. Assim, sendo a caixa de engrenagem posicionada de modo longitudinal no veículo, ela contribuirá de forma mais significativa para os níveis de pressão sonora medidos. Portanto, estas observações mostram claramente a boa predição realizada, uma vez que é teoricamente esperado que superfícies com grandes áreas e levemente curvas sejam bons radiadores de ruído. Assim, para limitar a radiação de ruído nas direções laterais, o ideal seria subdividir estas superfícies usando nervuras ou aumentar a espessura do alojamento nestas laterais, para que fosse possível limitar as vibrações estruturais.

Finalizando, pode-se dizer que os resultados alcançados neste trabalho permitem sistematizar um procedimento de modelagem vibro-acústica de caixas de engrenagem, que se coloca como alternativa ao método tradicional usado em caixas de engrenagens e outros componentes da indústria automotiva, de modo a possibilitar avaliação crítica de novos projetos e otimização de comportamento de projetos antigos, com encurtamento de tempo e custos de desenvolvimento. Desta forma, é interessante e encorajador realizar a continuação deste trabalho, visando possibilitar no futuro a otimização de projetos de caixa de engrenagem via computador.

## 8.2 – RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

O esforço de pesquisa desenvolvido neste trabalho permitiu a sistematização de um procedimento de predição de parâmetros vibro-acústicos de caixa de engrenagem ainda na fase de projeto. Isto permite ao engenheiro e/ou pesquisador ter informações significativas, para a construção do protótipo, ainda quando as mudanças podem ser implementadas com o menor esforço e custo. Baseado nesta premissa, sugere-se as seguintes recomendações que visam ampliar e/ou melhorar as possibilidades de previsão:

- Desenvolver uma representação tridimensional para a rigidez de engrenamento e erro de transmissão, possibilitando a incorporação de efeitos, que tenham como causa as forças axiais provenientes do engrenamento, os quais têm origem na inclinação dos dentes das engrenagens helicoidais e que foram negligenciados neste trabalho..

- Melhorar a formulação matemática para rolamento de rolos usando uma representação de carga distribuída para os elementos rolantes, ao invés da representação de carga concentrada usada neste trabalho.
- Implementar uma metodologia de otimização estrutural visando o projeto de caixas de engrenagens com baixa vibração. Nesta metodologia, a energia global de vibração da caixa de engrenagem pode ser usada como uma função objetivo a ser minimizada, variando a espessura dos elementos finitos de casca e sob condições restritivas de peso próprio.

Uma análise experimental é altamente recomendável para se estabelecer uma comparação entre dados experimentais e dados obtidos através das predições realizadas, bem como para possibilitar o desenvolvimento de modelos mais elaborados. Entretanto, para viabilizar esta análise, é importante o apoio financeiro por parte do fabricante da caixa de engrenagem, para que se possa construir um banco de prova de caixa de engrenagem que tenha os seguintes componentes: Motor de velocidade variável, Dinamômetro para simulação de carga, Acoplamentos, Mancais, Fixadores e Base Inercial.

Finalmente, para se estender a faixa de frequência de análise e estudar o fluxo de potência entre os componentes da caixa de engrenagem o método de Análise Estatística Energética pode ser usado. Assim, a caixa de engrenagem pode ser dividida em subsistemas e um balanço de energia para o sistema inteiro pode ser realizado, considerando a energia armazenada, a energia perdida para o ambiente e a energia transferida de um subsistema para outro.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ANSYS. **User's Manual – Theory**. V. 4, Revision 5.3, Swanson Analysis Systems, Inc., 1996.
- [2] ANSYS. **User's Manual Vol. 1 – Procedures**, Revision 5.1, Swanson Analysis Systems, Inc., 1994.
- [3] BEER, F. P. e JOHNSTON Jr., E. R. Cálculo da deformação das vigas por integração. In: \_\_\_\_\_. **Resistência dos Materiais**. São Paulo: Mc Graw-Hill do Brasil, 1982. p. 433–481.
- [4] BLANKENSHIP, G. W. e SINGH, R. Development of a signal processing technique for the objective rating of gear noise, **NOISE-COM 91**, p. 87-94, Tanytown, New York, July, 1991.
- [5] BRANDL, F. K. e RUST, A. Definition, identification and elimination of obtrusive gear rattle noise. **XXIII Fisita Congress**, Torino – Italy, May 1990.
- [6] BRITO, J. N. Modelo para rigidez de engrenamento. **Anais do IV Congresso de Engenharia Mecânica Norte-Nordeste**, p. 935-939, 1996.
- [7] BROWN, D. L. et al. Parameter estimation techniques for modal analysis. **Society of Automotive Engineers**, Paper N° 790221, 1979.
- [8] BUCKENS, F. On the damped coupled torsional and flexural vibrations of gear-controlled parallel shafts. **American Society of Mechanical Engineers**. Paper 80-C2/DET-6, 1980.
- [9] BURTON, A. J. e MILLER, G. F. The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems. **Proc. R. Soc. London**, V. 323, p. 201-220, 1971.
- [10] CARLSON, R., NEVES, C. G. C., SADOWSKI, N. e SOEIRO, N. S. Calculation of Electromagnetic-mechanic-acoustic Behavior of a Squirrel-Cage Induction Motor, **Proceedings of the 2nd International Seminar on Vibrations and Acoustic Noise of Electric Machinery**, Lodz (Polônia), 01 - 03 de Junho 2000.
- [11] CHOY, F. K. et al. Modal analysis of multistage gear systems coupled with gearbox vibrations. **Journal of Mechanical Design - Transactions of the ASME**, V. 114, p. 486-497, september, 1992.

- [12] CONRY, T. F. e SEIREG, A. A mathematical programming technique for the evaluation of load distribution and optimal modifications for gear systems. **Journal of Engineering for Industry**, Transactions of the ASME, V. 95, p. 1115-1122, November, 1973.
- [13] CONRY, T. F. e SEIREG, A. A mathematical programming for design of elastic bodies in contact. **Journal of Applied Mechanics**, Transactions of the ASME, V. 38, N. 1, p. 387-392, June, 1971.
- [14] CORNELL, R. W. Compliance and stress sensitivity of spur gear teeth. **Journal of Mechanical Design**, V. 103, p. 447-459, April, 1981.
- [15] COYETTE, J. P. e ROSSION, J. P. Treatment of irregular frequencies related to boundary elements models. **2nd Worldwide SYSNOISE Users Meeting Proceedings**, 1995.
- [16] DAWS, J. W. **An analytical investigation of three-dimensional vibration in gear-coupled rotor systems**. Virginia-USA, 1979. Ph. D. Dissertation in Mechanical Engineering, Virginia Polytechnic Institute and State University.
- [17] DEJONG, R. G. e MANNING, J. E. Gear noise analysis using modern signal processing and numerical modeling techniques, **SAE Paper 840478**, February 1984.
- [18] DENNIS Jr., J. E. e SCHNABEL, R. B. Appendix A: A modular system of Algorithms for unconstrained minimization and nonlinear equations. In: \_\_\_\_\_. **Numerical Methods for Optimization and Nonlinear Equations**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1996. P. 259-360.
- [19] DIMASROGONAS, A. D e HADDAD, S. Rotor dynamics. In: \_\_\_\_\_. **Vibration for Engineers**. New Jersey: Prentice-Hall, Inc. , 1992. p. 524-589.
- [20] DUNCAN, W. **Elementary matrices**. New York: Macmilian Company, 1946.
- [21] EWINS, D. J. **Modal testing theory and practice**. England: Research Studies Press Ltda., 1984.
- [22] GARDNER, K. B. Radiation efficiency calculation for verification of boundary element acoustic codes. **Noise Control Eng. J.**, V. 44 (5), p. 215-223, 1996.
- [23] GEAR DYNAMICS AND GEAR NOISE RESEARCH LABORATORY. User's manual for LDP and related programs: Version 8.3. **The Ohio State University - USA**, August, 1993.
- [24] GERGES, S. N. Y. **Ruído: fundamentos e controle**. 2ª Ed. Florianópolis: Editora da Universidade Federal de Santa Catarina, 2000.
- [25] HARRIS, T. A. **Rolling Bearing Analysis**. 3. ed. New York: John Wiley & Sons, 1991.



- [26] HARRIS, S. L. Dynamic loads on the teeth of spur gear. **Proc. I. Mech. E.**, V. 172, N° 2, p. 87-112, 1958.
- [27] HOUSER, D. R., Gear noise sources and their prediction using mathematical models. **Proceedings OEM Conference**, September, 1985.
- [28] HOUSER, D. R. **Notes on Fundamentals of Gearing**. The Ohio State University, Columbus – Ohio, 1983.
- [29] HOUSER, D. R. **Bibliography on gear noise**. ASME Gear Noise Subcommittee – Power Transmission and Gearing Committee – Design Engineering Division, August, 1978.
- [30] IBRAHIM, S. R. Computation of normal modes from identified complex modes. **AIAA Journal**, V. 21, N° 3, p. 446-451, 1983.
- [31] ISHIDA, K., MATSUDA, T. e FUKUI, M. Effect of gear box on noise reduction of geared device. **International Symposium on Gearing and Power Transmission**, p. 13-18, Tokyo, 1981.
- [32] IIDA, H. et al. Coupled torcional-flexural vibration of a shaft in a geared system of rotor. **Bulletin of the Japanese Society of Mechanical Engineers**, V. 23, N° 186, p. 2111-2117, December, 1980.
- [33] IMREGUN, M. e EWINS, D. J. Complex modes – origins and limits. **Proc. IMAC13**, p. 496-506, 1995.
- [34] JACOBSON, M. F. Acoustic and dynamic models of a NASA helicoptergerbox housing. Ohio: The Ohio State University-EUA, M. Sc. Thesis, 1994.
- [35] JARAMILLO, T. J. Deflections and moments due to a concentrated load on a cantilever plate of infinite length. **ASME Paper N° 49-AMP-15**, 1949.
- [36] JONES, A. B. A general theory for elastically constrained ball and radial roller bearings under arbitrary load and speed conditions. **Journal of Basic Engineering**, Transactions of the ASME, p. 309-320, June, 1960.
- [37] JUNGER, M. C. e FEIT, D. **Sound, structures, and their interaction**. Published by the Acoustical Society of America, 1993.
- [38] KAHRAMAN, A. et al. Dynamic analysis of geared rotors by finite elements. **Journal of Mechanical Design**, Transactions of the ASME, V. 114, p. 507-514, September, 1992.
- [39] KRAUS, J., BLECH, J. J. e BRAUN, S. G. In situ determination of rolling bearing stiffness and damping by modal analysis. **Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design**, Transactions of the ASME, V. 109, p. 235-240, 1987.

- [40] KIONO, S., AIDA, T. e FUJII, Y. Vibration of helical gears part 1: theoretical analysis. **Bulletin of the JSME**, V. 21, N° 155, p. 915-922, May, 1978.
- [41] KIONO, S., AIDA, T. e FUJII, Y. Vibration of helical gears part 2: experimental investigation. **Bulletin of the JSME**, V. 21, N° 155, p. 923-930, May, 1978.
- [42] KLOSTERMAN, A. L. **On the experimental determination and use of modal representation of dynamic characteristics**. 1971, Ph.D. Dissertation, University of Cincinnati.
- [43] KOMPELLA, M. S. e BERNHARD, R. J. Measurement of statical variation of structural-acoustic characteristics of automotive vehicles. **Proc. Noise and Vibration Conference**. (SAE), Paper 931272, 1993.
- [44] KUBO, A. Influence of manufacturing and alignment error in the maximum tooth fillet stress of involute helical gears. **Bulletin of the JSME**, V. 21, N° 160, p. 1540-1547, October, 1978.
- [45] KUBO, A. e KIYONO, S. Vibrational excitation of cylindrical involute gears due to tooth form error. **Bulletin of the JSME**, V. 23, N° 183, p. 1536-1543, September, 1980.
- [46] LALOR, N., DIXON, J. D. e STIMPSON, G. J. Source identification of automotive gearbox noise. **IMechE C404/033**, p. 83-96, 1990.
- [47] LANG, G. **Understanding vibration measurements**. Nicolet Scientific Corporation, Application Note 9, June, 1975.
- [48] LASKIN, I. Prediction of gear noise from design data. **AGMA Paper N° 299.03**, October, 1968.
- [49] LEISSA, A. **Vibration of Plates**. Published by the Acoustical Society of America, 1993.
- [50] LIEVEN, N. A. J. e EWINS, D. J. Error location and updating of finite element models using singular value decomposition. **IMAC 8**, V. 2, p. 768-773, 1990.
- [51] LIM, T. C. e SINGH, R. A review of gear housing dynamics and acoustics literature. **NASA Contractor Report 185146**, Technical Memorandum 89-C-009, October 1989.
- [52] LIM, T. C. e SINGH, R. Vibration transmission through rolling element bearings, Part I: bearing stiffness formulation. **Journal of Sound and Vibration**, V.139, N.2, p. 179-199, 1990.
- [53] LMS CADA PC. **User Manual**. Revision 1.2, LMS International, Leuven, 1992.
- [54] LUND, J. W. Critical speeds, stability and response of a geared train rotors. **Journal of Mechanical Design**, Transactions of the ASME, V. 100, p. 535-539, July, 1978.

- [55] MARK, W. D. Analysis of the vibratory excitation of gear systems: basic theory. **Journal of Acoustical Society of America**, V. 63, N° 5, p. 1409-1430, May, 1978.
- [56] MARK, W. D. Analysis of the vibratory excitation of gear systems. II: tooth error representations, approximations, and application. **Journal of Acoustical Society of America**, V. 66, N° 6, p. 1758-1787, December, 1979.
- [57] MISUN, V. Modelling and noise analysis of the vehicle gearbox. **Proceedings 4th Worldwide SYSNOISE Users Meeting**, Paper VII, Leuven - Belgium, September 15-17, 1997.
- [58] MITCHELL, L. D. e MELLEEN, D. M. Torcional-lateral coupling in a geared high-speed rotor system. **American Society of Mechanical Engineers**, Paper 75-DET-75, 1975.
- [59] MODESH. **Refrence Manual**. Version 6.7A, Imperial College Analysis, Testing and Software, London, 1997.
- [60] NELSON, H. D. e McVAUGH, J. M. The dynamics of rotor-bearing systems using finite elements. **Journal of Engineering for Industry**, Transactions of the ASME, V. 98, N° 2, p. 593-600, 1976.
- [61] NELSON, H. D. e McVAUGH, J. M. A finite rotating shsft element using Timoshenko beam theory. **Journal of Mechanical Design**, Transactions of the ASME, V. 102, N° 4, p. 793-803, 1980.
- [62] NERIYA, S. V., BHAT, R. B. e SANKAR, T. S. Efect of coupled torcional-flexural vibration of a geared shaft system on the dynamic tooth load. **The Shock and Vibration Bulletin**, V. 54, p. 67-75, June, 1984.
- [63] NERIYA, S. V., BHAT, R. B. e SANKAR, T. S. Coupled torcional-flexural vibration of a geared shaft system using finite element analysis. **The Shock and Vibration Bulletin**, V. 55, p. 13 – 25, June, 1985.
- [64] NEVES, C. G. C., CARLSON, R., SADOWSKI, N., BASTOS, J. P. A., SOEIRO, N. S. e GERGES, S. N. Y. Calculation of Electromagnetic -mechanic -acoustic Behavior of a Switched Reluctance Motor, **COMPUMAG 99 Proceedings**, V. I, p. 56-57, Sapporo (Japan), 25 a 28 de Outubro de 1999.(Artigo aceito para publicação no IEEE Trans. On Magnetics).
- [65] NIEDBAL, N. Analytical determination of real normal modes from measured complex response. **25<sup>th</sup> Structures, Structural Dynamics and Material Conference**, Palm Springs, p. 292-295, May, 1984.

- [66] ODA, S., KOIDE, T. e MIYACHIKA, K. Dynamic behavior of thin-rimmed helical gears with various web arrangements. **Bulletin of JSME**, V. 28, N° 244, p. 2434- 2441, October, 1985.
- [67] OZGUVEN, H. N. e HOUSER D. R. Gear dynamic models used in noise analysis. **NOISE-CON 87**, Pennsylvania June 8-10, 1987.
- [68] OZGUVEN, H. N. e HOUSER D. R. Dynamic analysis of high speed gears by using loaded static transmission error. **Journal of Sound and Vibration**, V. 125, N° 1, p. 71-83, 1988.
- [69] OZGUVEN, H. N. e HOUSER D. R. Mathematical models used in gear dynamics – A review. **Journal of Sound and Vibration**, V. 121, N° 3, p. 383-411, 1988.
- [70] OZGUVEN, H. N. e OZKAN, Z. L. Whirl speeds and unbalance response of multi-bearing rotors using finite elements. **Journal of Vibration, Acoustic, Styress and Reliability in Design**, Transactions of the ASME, V. 106, p. 72-79, 1983.
- [71] OZGUVEN, H. N. e HOUSER, D. R. Dynamic analysis of high speed gears by using loaded static transmission error. **Journal of Sound and Vibration**, V. 125, p. 71-83, 1988.
- [72] PALMGREN, A. **Ball and roller bearing engineering**. Philadelphia: S. H. Burbank, 1959.
- [73] PRIKRYL, K. Influence of the gearboxhousing surface ribs for the radiated noise. **Proceedings 4th Worldwide SYSNOISE Users Meeting**, Paper VI, Leuven - Belgium, September 15-17, 1997.
- [74] RAJAB, M. D. **Modeling of the transmissibility through rolling element bearing under radial and moment loads**. Ohio: The Ohio State University-EUA. 268 p. Ph.D. Dissertation, 1982.
- [75] RAGULSKIS, K. M.; JURKAUSKAS, A. Y.; ATSTUPENAS, V. V. et al. **Vibration of bearing**. New Delhi: Oxonian Press Pvt. Ltd., 1974.
- [76] RAO, J. S. **Rotor dynamics**. New Delhi: Wiley Eastern Limited, 1983.
- [77] REMMERS, E. P. Analytical gear tooth profile design. **ASME Paper N° 72-PTG-47**, p.1-7, October, 1972.
- [78] RUST, A., LI, C. L. e OSTERLOH, G. Comparative noise and vibration investigation of automotive transmission. **Third International Conference on Innovation in Automotive Design and Testing**, Florence-Italy, 8-10 April, 1992.



- [79] SAADA, A. e VELEX, P. An extended model for the analysis of the dynamic behavior of planetary trains. **Journal of Mechanical Design**, Transactions of the ASME, V. 117, p. 241-247, June, 1995.
- [80] SCHENCK, H. A. Improved integral formulation for acoustic radiation problems. **Journal of the Acoustical Society of America**, V. 44, N. 1, p. 41-58, 1968.
- [81] SEIREG, A. e HOUSER, D. R. An experimental investigation of dynamic factors in spur and helical gears. **Journal of Engineering for Industry**, Transactions of the ASME, p. 495-503, May, 1970.
- [82] SEIREG, A. e HOUSER, D. R. Evaluation of dynamic factors for spur and helical gears. **Journal of Engineering for Industry**, Transactions of the ASME, p. 504-515, May, 1970.
- [83] SENER, O. S. e OZGUVEN, H. N. Dynamic analysis of geared shaft systems by using a continuous system model. **Journal of Sound and Vibration**. V. 166, p. 539-556, 1993.
- [84] SHIGLEY, J. E.; MITCHELL, L. D. Helical, bevel and worm gears. In: \_\_\_\_\_. **Mechanical engineering design**. 4. Ed. Tokyo: Mc. Graw-Hill International Book Company, 1983. p. 632-687.
- [85] SINGH, R. **Casing Noise Radiation: Gear Noise Short Course Notes**. Ohio: The Ohio State University, 1985.
- [86] SINGH, R. XIE, H. e COMPARIN, R. J. Vibro-impacts in a geared rotating system, **Second International Symposium on Transport Phenomena, Dynamics and Design of Rotating Machinery**, p. 299-313, Honolulu, Hawaii, April, 1988.
- [87] STEGEMILLER, M. E. and HOUSER, D. R. A three dimensional analysis of the base flexibility of gear teeth. **ASME 5<sup>th</sup> International Power Transmission and Gearing Conference**, V. 1, p. 189-196, April, 1989.
- [88] SYSNOISE. **User's Manual**. Revision 5.4, LMS International N. V., Leuven, Belgica, 1999.
- [89] TAVAKOLI, M. S. e HOUSER, D. R. Optimum profile modifications for the minimization of static transmission erros of spur gear. **The American Society of Mechanical Engineers - ASME**, Paper 84-DET-173, 1984.
- [90] TUCKER, A. Gear design: dynamic loads. **Mechanical Engineering**, p. 29-33, October, 1971.
- [91] TUPLIN, W. A. Dynamic loads on gear teeth. **Machine Design**, p. 203-211, October, 1953.

- [92] UENO, T. et al. Effects of tooth form on stresses in helical gears (2st Reports, Effects of convex and concave tooth profiles). **Bulletin of JSME**, V. 27, N° 233, p. 2545- 2552, November, 1984.
- [93] UMEZAWA, K., SUZUKI, T. e SATO, T. Vibration of power transmission helical gears: approximate equation of tooth stiffness. **Bulletin of JSME**, V. 29, N° 251, p. 1605-1611, May, 1986.
- [94] VELEX, P. e BERTHE, D. Dynamic tooth on geared train. **ASME Proc. 5<sup>th</sup> Int. Power Trans. And Gearing Conf.**, V.1, p. 447-454, Chicago, 1989.
- [95] VIERSBACH, U. and MAURELL, R. Comparing acoustic measurements with combined MSC/NASTRAN-SYSNOISE sound radiation predictions of na engine block. **The 1994 MSC World User's Conference**, Lake Buena Vista – Florida, June 20-24, 1994.
- [96] WALFORD, T. L. H. e STONE, B. J. The measurement of the radial stiffness of rolling element bearings under oscillating conditions. **Journal Mechanical Engineering Science**, V. 22, N. 4, p.175-181, 1980.
- [97] WALLACE, C. E. Radiation Resistance of a Rectangular Panel. **Journal of the Acoustical Society of America**, V. 51, N. 3, p. 946-952, Parte 2, 1972.
- [98] WELLAUER, E. J. e SEIREG, A. Bending strength of gear teeth by cantilever-plate theory. **Journal of Engineering for Industry**, Transaction of the ASME, p. 213-222, August, 1960.
- [99] WHILE, M. F. Rolling element bearing vibration transfer characteristics: effect of stiffness. **Journal of Applied Mechanics**, Transactions of the ASME, V. 46, p. 677-684, 1979.

## ANEXO 1

### FORMULAÇÃO MATEMÁTICA PARA A DETERMINAÇÃO DA CONSTANTE CARGA-DEFLEXÃO DE ROLAMENTOS DE ESFERAS E DE ROLOS

#### A1.1 – TEORIA DE HERTZ PARA CORPOS ELÁSTICOS SÓLIDOS EM CONTATO

Quando dois corpos sólidos, curvos e elásticos são comprimidos juntos sob um carregamento, um certo achatamento ocorre no ponto de contato. Associado a esse achatamento, ocorre uma pressão elíptica na área de contato sobre a qual todo o carregamento é distribuído. As relações que comandam a forma e o tamanho da área de contato e a distribuição de esforços sobre essa área foi investigada matematicamente por Heinrich Hertz e publicado em Berlim em janeiro de 1881. As análises de Hertz estavam baseadas nas suposições do comportamento elástico e isotrópico do material, carregamento normal à superfície e uma área de contato cujas dimensões eram relativamente pequenas em comparação com os raios de curvatura e com as dimensões dos corpos em contato.

Sejam os corpos 1 e 2 representados na Fig. A1.1, para os quais são definidas as curvaturas  $\rho_{11} = 1/R_{11}$ ,  $\rho_{12} = 1/R_{12}$ ,  $\rho_{21} = 1/R_{21}$  e  $\rho_{22} = 1/R_{22}$ . Os raios de curvatura são medidos em dois planos, 1 e 2, perpendiculares entre si, como mostrado na Fig. A1.1.

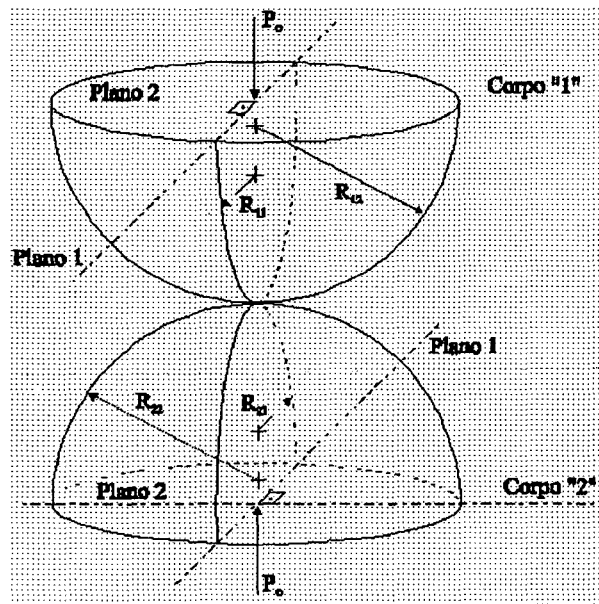


Figura A1.1 - Caso genérico de contato entre dois corpos curvos [3].

Quando os corpos 1 e 2 são comprimidos pelo carregamento  $P$ , a área de contato resultante apresenta-se elíptica cujos semi-eixos  $a$  e  $b$  são mostrados na Fig. A1.2.

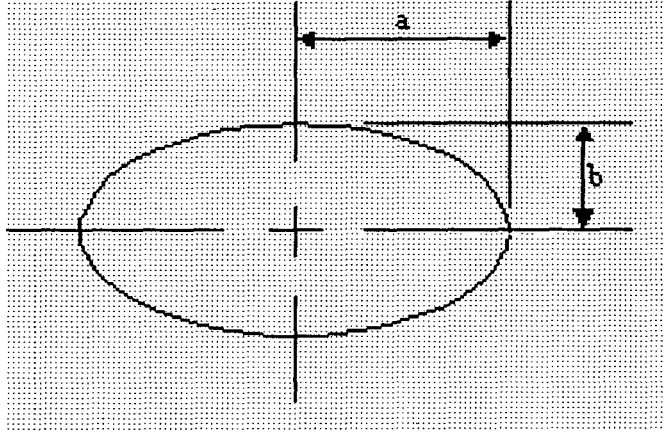


Figura A1.2 - Área de contato elíptica.

Segundo Hertz, as dimensões da área de contato podem ser expressas em termos das funções transcendentais  $\mu$  e  $\nu$  seguintes:

$$a = \mu \cdot q \quad (\text{A1.1})$$

$$b = \nu \cdot q \quad (\text{A1.2})$$

nas quais

$$q = \sqrt[3]{\frac{3P}{2} \cdot \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{(\sum \rho)}} \quad (\text{A1.3})$$

onde

$$\sum \rho = \rho_{11} + \rho_{12} + \rho_{21} + \rho_{22} \quad (\text{A1.4})$$

$$\lambda_1 = \frac{1 - \vartheta_1^2}{E_1}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \vartheta_2^2}{E_2} \quad (\text{A1.5})$$

sendo  $E_1$  e  $E_2$  os módulos de elasticidade e  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_2$  os coeficientes de Poisson dos materiais dos corpos 1 e 2.



Os valores dos raios de curvatura são tomados de acordo com a Fig. A1.3, ou seja, podem ser positivos ou negativos. Serão considerados positivos para superfícies convexas e negativo para superfícies côncavas.

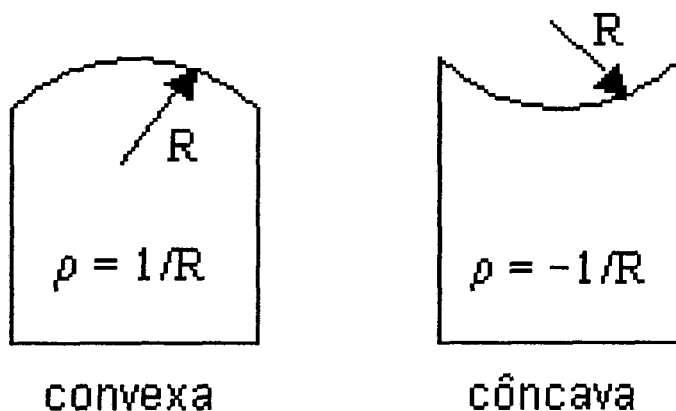


Figura A1.3 - Convenção do sinal do raio de curvatura.

Os parâmetros  $\mu$  e  $\nu$ , para o uso nas Eq. (A1.1) e (A1.2), dependem da conformidade dos corpos nas proximidades da área de contato, como determinado pelo ângulo auxiliar  $\tau$ .

$$\cos(\tau) = \frac{\sqrt{(\rho_{11} - \rho_{12})^2 + (\rho_{21} - \rho_{22})^2 + 2(\rho_{11} - \rho_{12})(\rho_{21} - \rho_{22})\cos(2\gamma)}}{\sum \rho} \quad (\text{A1.6})$$

onde  $\gamma$  representa o ângulo entre os planos 1 e 2.

A ligação funcional entre  $\mu$ ,  $\nu$  e  $\tau$  pode ser expressa por meio de um ângulo auxiliar  $\epsilon$ , o qual depende da forma da elipse de contato, conforme as seguintes equações:

$$\cos(\tau) = 1 - \frac{2[\kappa(\epsilon) - \chi(\epsilon)]\cot^2(\epsilon)}{\chi(\epsilon)} \quad (\text{A1.7})$$

$$\nu = \sqrt[3]{\frac{2\chi(\epsilon)\cos(\epsilon)}{\pi}} \quad (\text{A1.8})$$

$$\cos(\epsilon) = \frac{\nu}{\mu} = \frac{b}{a} \quad (\text{A1.9})$$

$\kappa(\epsilon)$  e  $\chi(\epsilon)$  são integrais elípticas de primeira e segunda ordem, dadas por:

$$\kappa(\epsilon) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2(\epsilon) \sin^2(\phi)}} \quad (\text{A1.10})$$

$$\chi(\epsilon) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2(\epsilon) \sin^2(\phi)} \cdot d\phi \quad (\text{A1.11})$$

A distribuição do esforço de compressão na superfície da área de contato elíptica é proporcional às ordenadas do semi-elipsóide de revolução construído tendo como base a área de contato, conforme mostrado na Fig. A1.4.

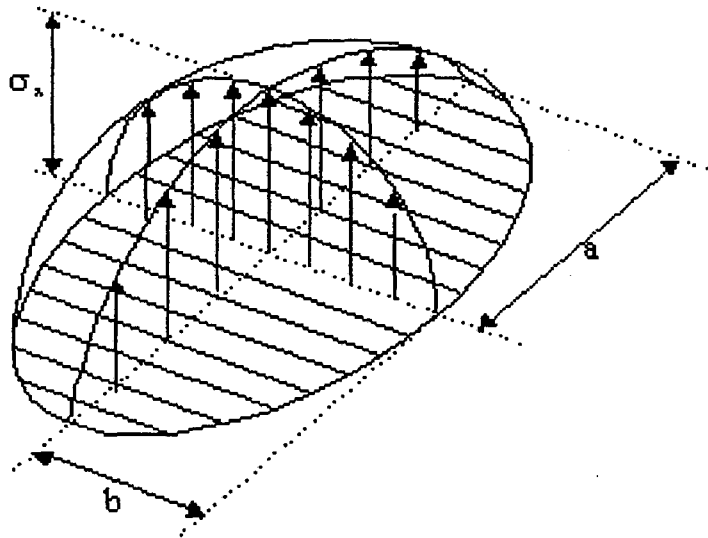


Figura A1.4 - Elipse de pressão no contato [3].

O esforço de compressão que atua sobre um ponto genérico (x,y) é:

$$\sigma_z(x, y) = \frac{3P}{2\pi ab} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (\text{A1.12})$$

Da Eq. (A1.12), é visível que o valor máximo para o esforço de compressão ocorre no centro da área de contato. Seu valor é:

$$\sigma_z(\max) = \frac{3P}{2\pi ab} \quad (\text{A1.13})$$

A deflexão entre os corpos em contato, sob a ação de uma carga Q, segundo Hertz é:

$$\delta = \frac{3P(\lambda_1 + \lambda_2)}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(a^2 + b^2 z^2)(1 + z^2)}} \quad (\text{A1.14})$$

que para  $z = \tan(\phi)$ ,  $b = a \cdot \cos(\epsilon)$  e o auxílio das Eq's (A1.1) e (A1.3), torna-se:

$$\delta = \delta^* \sqrt[3]{\frac{9P^2(\lambda_1 + \lambda_2)^2(\sum \rho)}{32}} \quad (\text{A1.15})$$

onde

$$\delta^* = \frac{2 \cdot \kappa(\epsilon)}{\pi \mu}$$

Para corpos de aço em contato, a Eq. (A1.15) pode ser escrita como segue:

$$\delta = 2.79 \times 10^{-4} \delta^* P^{2/3} (\sum \rho)^{1/3} \quad (\text{A1.16})$$

Os Valores das quantidades adimensionais  $\nu$ ,  $\mu$  e  $\delta^*$ , como função do ângulo auxiliar  $\tau$ , são dados na tabela A1.1.

## A1.2 – ROLAMENTO DE ESFERAS

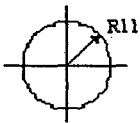
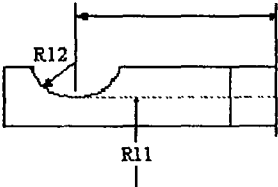
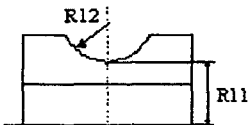
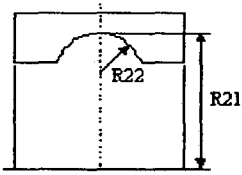
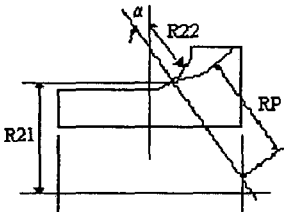
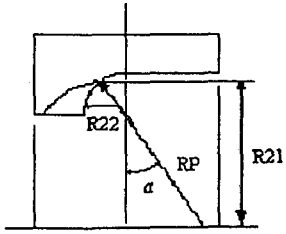
A aplicação da teoria de Hertz para rolamento de esferas deve ser feita dando-se atenção especial aos fatores principais  $\sum \rho$  e  $\cos(\tau)$ .

$\Sigma\rho$  é o símbolo para a soma das curvaturas principais para os dois corpos em contato, dado pela Eq. (A1.4). Sua quantificação depende da regra de sinais para as curvaturas, a qual estabelece que para superfícies do corpo convexas a curvatura é positiva e quando côncava ela é negativa. De modo a se evitar erros na quantificação de  $\Sigma\rho$ , a tabela A1.2 mostra claramente quando o sinal + ou - deverá ser usado.

Tabela A1.1 - Valores de  $\mu$ ,  $\nu$  e  $\delta^*$  como função de  $\tau$  [3].

| $\text{Cos } \tau$ | $\mu$  | $\nu$   | $\delta^*$ | $\text{Cos } \tau$ | $\mu$    | $\nu$   | $\delta^*$ |
|--------------------|--------|---------|------------|--------------------|----------|---------|------------|
| 0                  | 1      | 1       | 1          | 0,9573800          | 4,395    | 0,38300 | 0,55510    |
| 0,1075000          | 1,0760 | 0,9318  | 0,9974     | 0,9729000          | 5,267    | 0,34900 | 0,49600    |
| 0,3204000          | 1,2623 | 0,8114  | 0,9761     | 0,9837970          | 6,448    | 0,31500 | 0,43520    |
| 0,4795000          | 1,4556 | 0,7278  | 0,9429     | 0,9909020          | 8,062    | 0,28140 | 0,37450    |
| 0,5916000          | 1,6440 | 0,6687  | 0,9077     | 0,9951120          | 10,222   | 0,24970 | 0,31760    |
| 0,6716000          | 1,8258 | 0,6245  | 0,8733     | 0,9973000          | 12,789   | 0,22320 | 0,27050    |
| 0,7332000          | 2,0110 | 0,5881  | 0,8394     | 0,9981847          | 14,839   | 0,20720 | 0,24270    |
| 0,7948000          | 2,2650 | 0,5480  | 0,7961     | 0,9989156          | 17,974   | 0,18822 | 0,21060    |
| 0,8349500          | 2,4940 | 0,5186  | 0,7602     | 0,9994785          | 23,550   | 0,16442 | 0,17167    |
| 0,8736600          | 2,8000 | 0,4863  | 0,7169     | 0,9998527          | 37,380   | 0,13050 | 0,11995    |
| 0,9099900          | 3,2330 | 0,44990 | 0,66360    | 1                  | $\infty$ | 0       | 0          |
| 0,9365700          | 3,7380 | 0,4166  | 0,6112     |                    |          |         |            |

Tabela A1.2 - Convenções de sinal para superfícies de contato em rolamento de esferas

|             | ESFERA  | AXIAL   | RADIAL INTERNO   |
|-------------|---|---|--|
|             |  |  |  |
| $\rho_{11}$ | $+1/R_{11}$   | $+1/R_{11} = 1/\infty = 0$  | $+1/R_{11}$  |
| $\rho_{12}$ | $+1/R_{11}$   | $-1/R_{12}$   | $-1/R_{12}$  |
|             |  |  |  |
| $\rho_{21}$ | $+1/R_{21}$   | $+\cos(\alpha)/R_{21} = 1/R_P$  | $+\cos(\alpha)/R_{21} = 1/R_P$   |
| $\rho_{22}$ | $+1/R_{22}$   | $-1/R_{22}$   | $-1/R_{22}$  |
|             | RADIAL EXTERNO  | CONTATO ANG. INTERNO  | CONTATO ANG. EXTERNO   |



Outra observação importante refere-se ao valor de  $\cos(\tau)$ , uma vez que seu valor depende do ângulo entre os planos 1 e 2. Assim, como esses planos são perpendiculares entre si, para o caso de rolamento de esferas, a Eq. (A1.6) pode ser simplificada assumindo a seguinte forma:

$$\cos(\tau) = \frac{(\rho_{11} - \rho_{12}) + (\rho_{21} - \rho_{22})}{\sum \rho} \quad (\text{A1.17})$$

A relação carga-deflexão, para o contato entre o elemento rolante (esfera) e sua pista de rolamento, tendo por base a Eq. (A1.16), pode ser escrita como:

$$P = K_j \cdot \delta_j^{3/2} \quad (\text{A1.17})$$

com

$$K_j = 2,15 \times 10^5 (\sum \rho)^{-1/2} (\delta^*)^{-3/2} \quad (\text{A1.19})$$

onde  $j = i$  para o contato pista interna-esfera e  $j = o$  para o contato esfera-pista externa.

A deformação normal total para o contato pista interna-esfera-pista externa é a soma das deformações para os contatos pista interna-esfera e esfera-pista externa. Assim, a constante carga-deflexão global ( $K_n$ ), que representa o contato pista interna-esfera-pista externa, é obtida pela associação de  $K_i$  e  $K_o$  como segue:

$$K_n = \left[ \frac{1}{(1/K_i)^{2/3} + (1/K_o)^{2/3}} \right]^{3/2} \quad (\text{A1.20})$$

### A1.3 – ROLAMENTO DE ROLOS

No rolamento de rolos, diferente do rolamento de esfera, o contato entre o elemento rolante (rolo) e a pista de rolamento é representado por uma linha. Para que esse contato seja ideal, o comprimento do corpo 1 deve se igualar ao comprimento do corpo 2. Então, a relação

$a/b$  tende para infinito e a distribuição de tensão na área de contato degenera para uma forma semicilíndrica como mostrado na Fig. A1.5. Para essa condição,

$$\sigma_{\max} = \frac{2P}{\pi \ell b} \quad (\text{A1.21})$$

$$\sigma = \frac{2P}{\pi \ell b} \left[ 1 - \left( \frac{y}{b} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{A1.22})$$

$$b = \left[ \frac{4P}{\pi \ell (\sum \rho)} \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) \right]^{1/2} \quad (\text{A1.23})$$

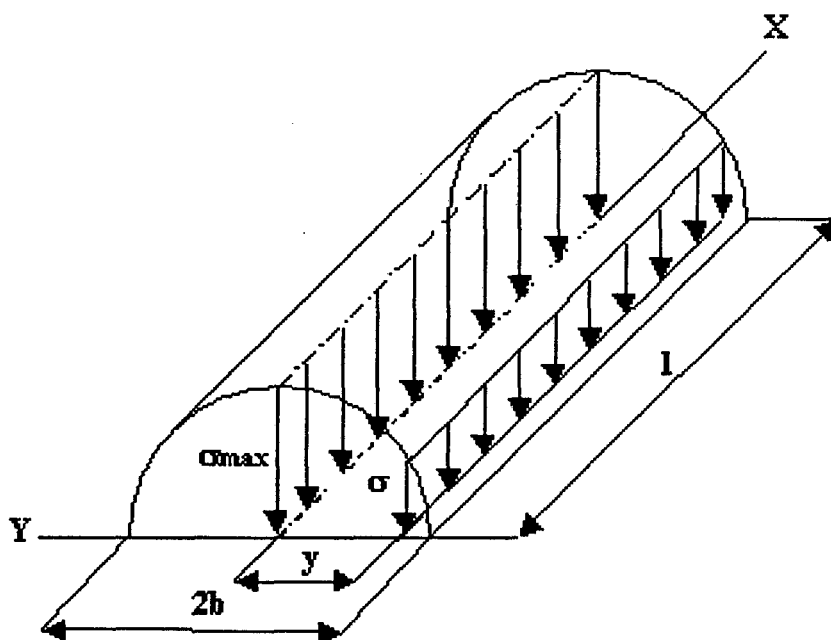


Figura A1.5 - Distribuição de Tensão Compressiva para Contato de Linha Ideal [3].

A deformação para corpos de aço em contato, segundo Harris [3], é dada pela seguinte equação de Palmgren, como função da carga  $P$  e do comprimento efetivo do rolo  $\ell$ :

$$\delta = 3,84 \times 10^{-5} \frac{P^{0,9}}{\ell^{0,8}} \quad (\text{A1.24})$$

Tomando por base a Eq. (A1.24), a relação carga-deflexão pode ser expressa como:

$$P = K_j \cdot \delta_j^{10/9} \quad (\text{A1.25})$$

com

$$K_j = 8,06 \times 10^4 \cdot \ell^{8/9} \quad (\text{A1.26})$$

onde  $j = i$  para o contato pista interna-rolô e  $j = o$  para o contato rolô-pista externa. Assim, como para os rolamentos de esfera, a constante carga-deflexão global ( $K_n$ ), que representa o contato pista interna-rolô-pista externa, é obtida pela associação de  $K_i$  e  $K_o$  como segue:

$$K_n = \left[ \frac{1}{(1/K_i)^{9/10} + (1/K_o)^{9/10}} \right]^{10/9} \quad (\text{A1.27})$$

Nas equações (A1.20) e (A1.27) os valores de  $K_n$  são dados, respectivamente, em  $\text{N/mm}^{3/2}$  e  $\text{N/mm}^{10/9}$ , para valores dos parâmetros geométricos dos rolamentos dados em milímetros.

## **ANEXO 2**

### **LIMITAÇÕES DO MODELO DE MANCAL DE ELEMENTOS ROLANTES**

#### **A2.1 – INTRODUÇÃO**

A formulação matemática apresentada no Capítulo 2, para a determinação da matriz de rigidez de mancais de elementos rolantes, foi desenvolvida através da simplificação da abordagem encontrada no artigo de Jones[36], negligenciando os efeitos de força centrífuga e do momento giroscópico sobre os elementos rolantes. Entretanto, a partir de contatos feitos com a *Ohio State University*, através do Ph.D. Donald R. House, foi possível ter acesso a um modelo de mancal desenvolvido por Lim e Singh [51] que se baseia nas mesmas premissas de nossa formulação. A diferença básica entre os modelos está na forma de se posicionar os elementos rolantes, ou seja, nosso desenvolvimento toma como referência para medição do ângulo que posiciona os elementos rolantes ( $\psi$ ) o eixo Y do sistema de coordenada usado e o sentido horário enquanto que, no artigo de Lim e Singh [51], é usado o eixo X e o sentido anti-horário.

Tomando por base os parâmetros de projeto para os rolamentos de esferas e de rolos, apresentados naquele artigo, foi feita uma predição dos coeficientes de rigidez para ambos os rolamentos a partir da formulação apresentada no Capítulo 2, de modo a validar nossa formulação. Contudo, os resultados obtidos levaram à identificação de um comportamento irregular, para alguns dos coeficientes de rigidez, que não foram apontados no artigo de Lim e Singh [51].

Nesta seção são apresentados os dados e os resultados obtidos por nossa formulação, bem como o desenvolvimento teórico que permite explicar as causas que levam ao comportamento irregular de alguns dos coeficientes de rigidez. Também, apresentam-se as equações que servem para limitar o uso da formulação matemática desenvolvida no Capítulo 2.

#### **A2.2 – ANÁLISE PARA O ROLAMENTO DE ESFERAS**

Uma simulação é feita para um rolamento de esferas submetido a uma deflexão puramente radial. O objetivo é a determinação do comportamento dos coeficientes de rigidez dominantes para vários valores do ângulo de contato sem carga. Assim, os parâmetros de projeto do



rolamento são dados na tabela A2.1, extraída do artigo de Lin e Singh [51], e o ângulo de contato sem carga assume valores que varia de 0 a 90 graus.

Tabela A2.1 – Parâmetros de projeto para os rolamentos de esferas e de rolos

| PARÂMETROS   | ROLAMENTO DE ESFERAS | ROLAMENTO DE ROLOS |
|--|----------------------|--------------------|
| Expoente carga-deflexão, n                             | 3/2                  | 10/9               |
| Constante carga-deflexão, $K_{cd}$ (N/m <sup>n</sup> ) | 8,5E+09              | 3,0E+08            |
| Número de elementos rolantes, Z                        | 12                   | 14                 |
| Folga radial, $r_L$ (mm)                               | 0,00005              | 0.00175            |
| Raio primitivo, r (mm)                                 | 19,65                | 21,25              |
| B.d (mm)   | 0,05                 | -                  |

A Fig. A2.1 apresenta as curvas obtidas por nossa formulação matemática e, como pode ser observado, o comportamento das curvas que representam os coeficientes de rigidez  $k_{xz}$ ,  $k_{zz}$ ,  $k_{z\alpha y}$ ,  $k_{\alpha y \alpha y}$  e  $k_{\alpha y \alpha x}$  é bastante irregular, uma vez que alguns destes coeficientes apresentam um brusco aumento ou decaimento no seu valor. Aqui é importante registrar que para a mesma simulação Lim e Singh [51] apresentam uma figura semelhante à Fig. A2.1 mas que não apresenta o comportamento irregular das curvas que representam aqueles coeficientes de rigidez.

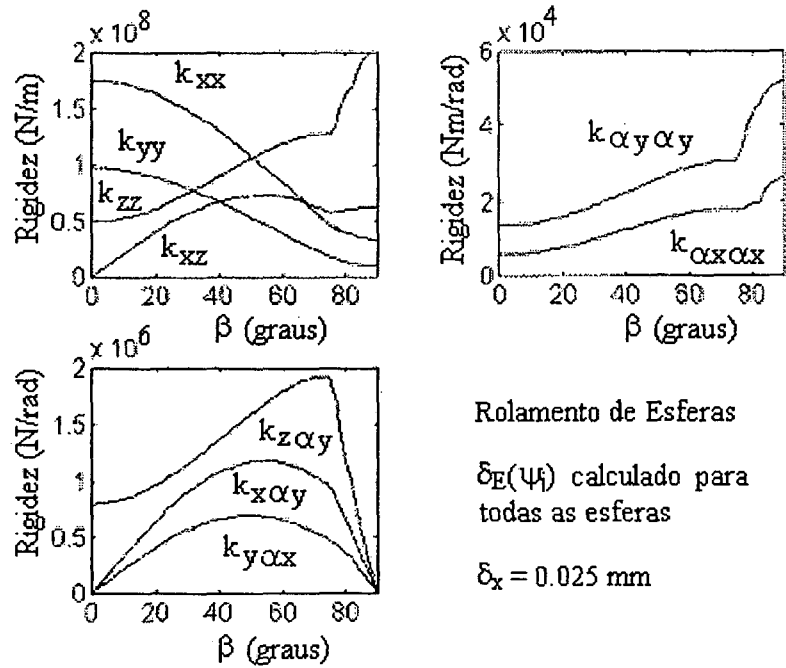


Figura A2.1 – Coeficientes de rigidez dominante para o rolamento de esfera.

Para explicar o comportamento irregular dos coeficientes de rigidez acima referenciados, dado um deslocamento radial constante, verificaremos a deformação dos elementos rolantes  $\delta_E(\psi_j)$ . Assim, como  $\delta_y = \delta_z = \alpha_x = \alpha_y = 0$ , temos:

$$\begin{aligned} Ar_j &= Bd \cos \beta_0 + \delta r_j; \quad Aa_j = Bd \sin \beta_0 + \delta a_j; \quad A_j = \sqrt{Ar_j^2 + Aa_j^2} \\ \delta r_j &= \delta_x \sin \psi_j - r_L; \quad \delta a_j = 0 \end{aligned} \quad (A2.1)$$

Então, a deformação no  $j$ -ésimo elemento rolante é:

$$\delta_E(\psi_j) = \sqrt{(Bd \cos \beta_0 + \delta r_j)^2 + (Bd \sin \beta_0)^2} - Bd \quad (A2.2)$$

e, para que ela exista, é necessário que  $\delta_E(\psi_j) > 0$ , o que permite escrever a seguinte expressão:

$$(Bd \cos \beta_0 + \delta r_j)^2 + (Bd \sin \beta_0)^2 > (Bd)^2 \quad (A2.3)$$

que desenvolvida leva à seguinte inequação:

$$\cos \beta_0 > \frac{-\delta r_j}{2Bd} \quad \text{ou} \quad \cos \beta_0 > \frac{-\delta_x \sin \psi_j + r_L}{2Bd} \quad (A2.4)$$

Assim, podemos ter duas situações que dependem do termo  $\delta_x \sin \psi_j$ , isto é, se ele é positivo ou negativo, como mostrado na Fig. A2.2 para  $\delta_x = 0,025$  mm.

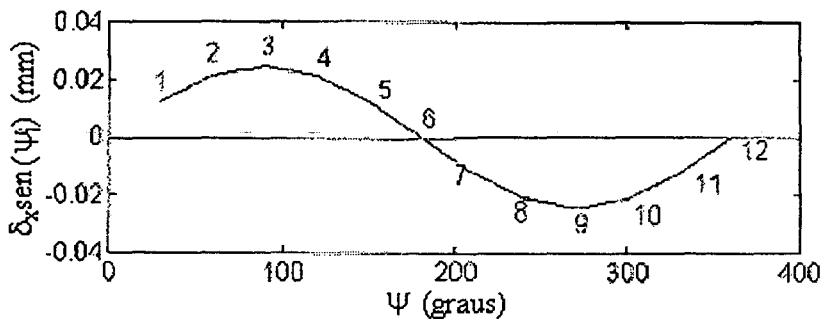


Figura A2.2 – Valores de  $\delta_x \sin \psi_j$  para  $\delta_x = 0,025$  mm, com indicação do elemento rolante.

Quando  $-\delta_x \cdot \sin \psi_j + r_L$  é negativo, como para os elementos rolantes 1, 2, 3, 4 e 5, uma vez que  $r_L \ll \delta_x$ , existe deformação do elemento rolante se  $\cos \beta_0$  não for negativo. Portanto, como  $\beta_0$  assume valores de 0 a 90 graus, esta condição é sempre satisfeita e reflete um comportamento físico real. Entretanto, quando  $-\delta_x \cdot \sin \psi_j + r_L$  é positivo, como para os elementos rolantes 7, 8, 9, 10 e 11, os elementos rolantes apresentam deformação positiva para alguns valores de  $\beta_0$ , como mostrado na Fig. A2.3 e a seguir demonstrado:

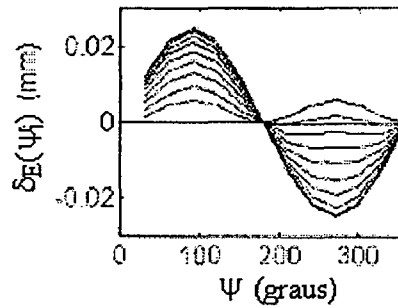


Figura A2.3 – Deformação dos elementos rolantes para  $0 \leq \beta_0 \leq 90$  graus.

**ELEMENTO 9:**  $\psi_j = 270$  graus  $\rightarrow \sin \psi_j = -1$ . Fazendo  $\delta_x = 0,025$  mm,  $Bd = 0,05$  mm e  $r_L = 0,00005$  mm, na Eq. (A2.4), leva à  $\beta_0 > 75,49$  graus aproximadamente.

**ELEMENTO 8 e 10:**  $\psi_j = 240$  e  $300$  graus, respectivamente  $\rightarrow \sin \psi_j = -0,866$ . Então, da Eq. (A2.4), temos que  $\beta_0 > 77,47$  graus aproximadamente.

**ELEMENTO 7 e 11:**  $\psi_j = 210$  e  $330$  graus, respectivamente  $\rightarrow \sin \psi_j = -0,5$ . Então, da Eq. (A2.4), temos que  $\beta_0 > 82,79$  graus aproximadamente.

Portanto, para valores de  $\beta_0 > 75,49$  graus, os elementos rolantes passam a apresentar deformação elevando os valores dos coeficientes de rigidez, como foi mostrado na Fig. A2.1. Contudo, este comportamento não concorda com a realidade, uma vez que os elementos rolantes 7, 8, 9, 10 e 11 não devem apresentar deformação devido ao fato de que a carga radial é inteiramente suportada pelos elementos rolantes posicionados do lado direito do eixo Y, como mostrado na Fig. A2.4 referente a um rolamento com 8 elementos rolantes.

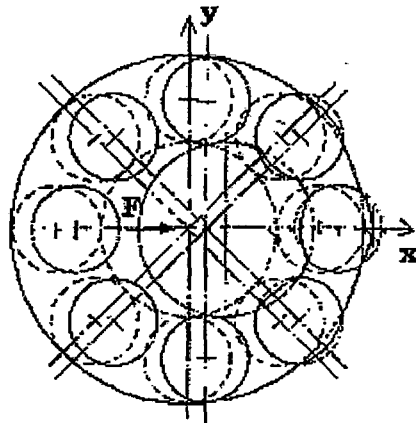


Figura A2.4 – Rolamento de esfera submetido a deflexão puramente radial.

Omitindo a deformação dos elementos rolantes 7, 8, 9, 10 e 11, no cálculo dos coeficientes de rigidez, a Fig. A2.1 assume a forma mostrada na Fig. A2.5, a qual concorda com a figura apresentada no artigo de Lim e Singh [51]. Aqui deve ficar claro que usando as equações apresentadas naquele artigo chega-se às mesmas conclusões mas os valores de  $\psi_j$  são diferentes em virtude do sistema de referência adotado.

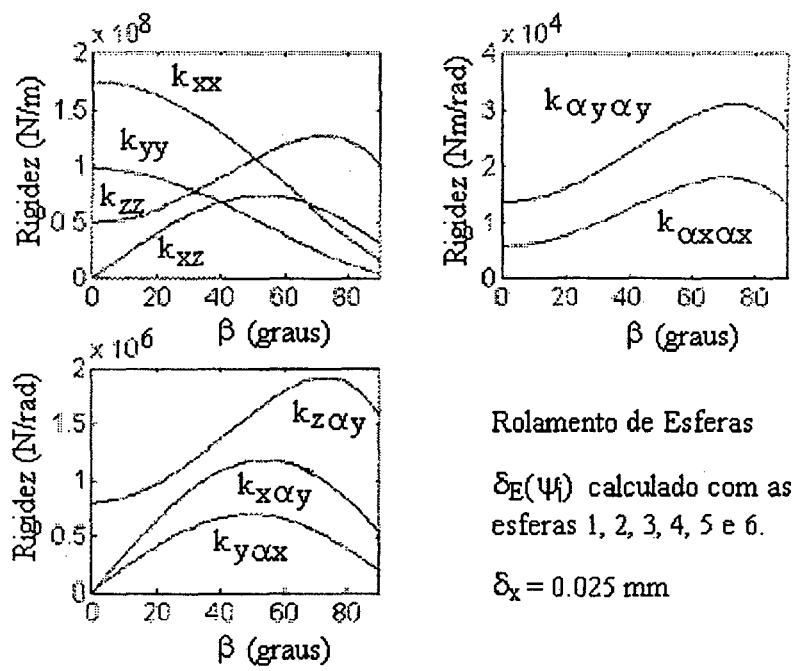


Figura A2.5 – Coeficientes de rigidez dominante corrigidos.



### A2.3 – ANÁLISE PARA O ROLAMENTO DE ROLOS

Para o rolamento de rolos, a simulação foi feita assumindo um deslocamento puramente axial e, como para o rolamento de esferas, o ângulo de contato sem carga assumiu valores que variaram de 0 a 90 graus. Os parâmetros de projeto são os listados na tabela A2.1 e as curvas obtidas pela formulação matemática do Capítulo 2, para  $\delta_z = 0,025$ , são apresentadas na Fig. A2.6.

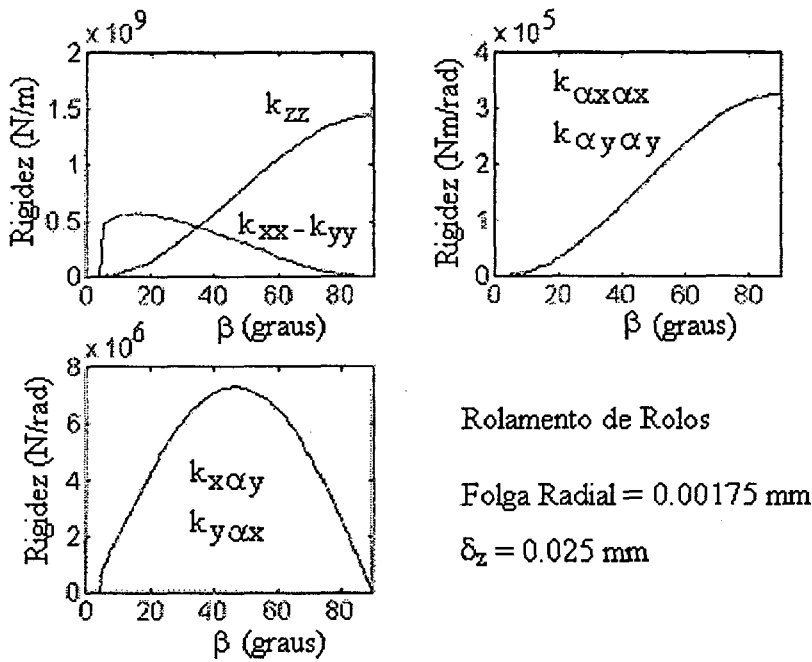


Figura A2.6 – Coeficientes de rigidez dominantes para rolamento de rolos.

As curvas que representam os coeficientes de rigidez  $k_{xx}$ ,  $k_{yy}$ ,  $k_{x\alpha y}$  e  $k_{y\alpha x}$  apresentam valores nulos para alguns valores pequenos de  $\beta_0$ , o que não é mostrado no artigo de Lin e Singh [51]. Assim, a exemplo do que foi feito para o rolamento de esferas, é possível estabelecer a seguinte expressão para se determinar estes valores de  $\beta_0$ :

$$\text{tg} \beta_0 \leq \frac{r_L}{\delta_z} \quad (\text{A2.5})$$

que para  $r_L = 0,00175$  mm e  $\delta_z = 0,025$  mm leva a  $\beta_0 \leq 4$  graus.

Portanto, pela formulação matemática usada, para valores de  $\beta_0 \leq 4$  graus, os coeficientes já referenciados devem ser nulos. Estes valores serão como os apresentados no artigo de Lim e Singh [51] somente se assumirmos um valor nulo para a folga radial, conforme mostrado na Fig. A2.7.

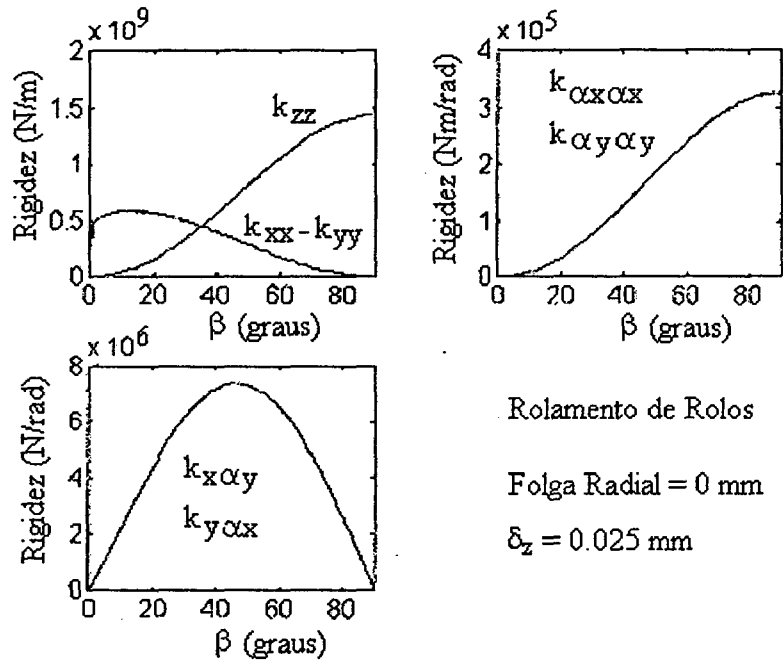


Figura A2.7 – Coeficientes de rigidez dominante corrigidos para rolamento de rolos.

### **ANEXO 3**

## **ALGORITMO PARA SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES**

### **A3.1 – INTRODUÇÃO**

O modelo para mancais de elementos rolantes, apresentado no Capítulo 2, consiste na obtenção de uma matriz de rigidez  $K_m$ , para implementação em “software” de elementos finitos como elementos de rigidez generalizada, cujos coeficientes são determinados a partir da obtenção dos deslocamentos de translação e rotação dos mancais, que são consequência do carregamento aplicado ao mancal. Assim, de um modo geral, a determinação destes coeficientes envolve a solução de um sistema de equações não-lineares, que foi computacionalmente implementada a partir do Método de Newton, com algumas modificações, conforme algoritmo apresentado no Apêndice do livro "Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations", escrito por J. Dennis e R. Schnabel [18], para o qual será apresentado, a seguir, uma breve descrição e o código feito para rodar no *software* MATLAB.

### **A3.2 – ORGANIZAÇÃO DO ALGORITMO**

A organização do algoritmo segue o Método Quasi-Newton, cuja idéia básica é a de combinar uma estratégia de convergência global com uma outra de convergência local, de tal modo que se obtenha os benefícios de ambas. Assim, primeiramente, o Método de Newton é usado em cada iteração mas, se a hipótese inicial é pobre, uma busca unidimensional é incluída para fornecer convergência global. Neste algoritmo, as derivadas são computadas pela técnica de diferenças finitas, com base nas funções de entrada, a menos que expressões analíticas para o Jacobiano sejam fornecidas.

O diagrama mostrado na Fig. A2.1 apresenta a estrutura do algoritmo, sendo que cada um dos retângulos representa um módulo, cujos objetivos são descritos a seguir:

#### **A3.2.1 – MÓDULO PRINCIPAL NEDRIVER**

Este é o módulo principal do algoritmo que tem como objetivo determinar uma raiz de  $F(\mathbf{x}): \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ . Sua implementação se dá pelo comando  $\mathbf{X} = \text{nedriver}(\text{'função'}, \mathbf{X}_0)$ , no ambiente do MATLAB, em que  $\mathbf{X}_0$  representa um vetor que contém as hipótese iniciais, para os valores

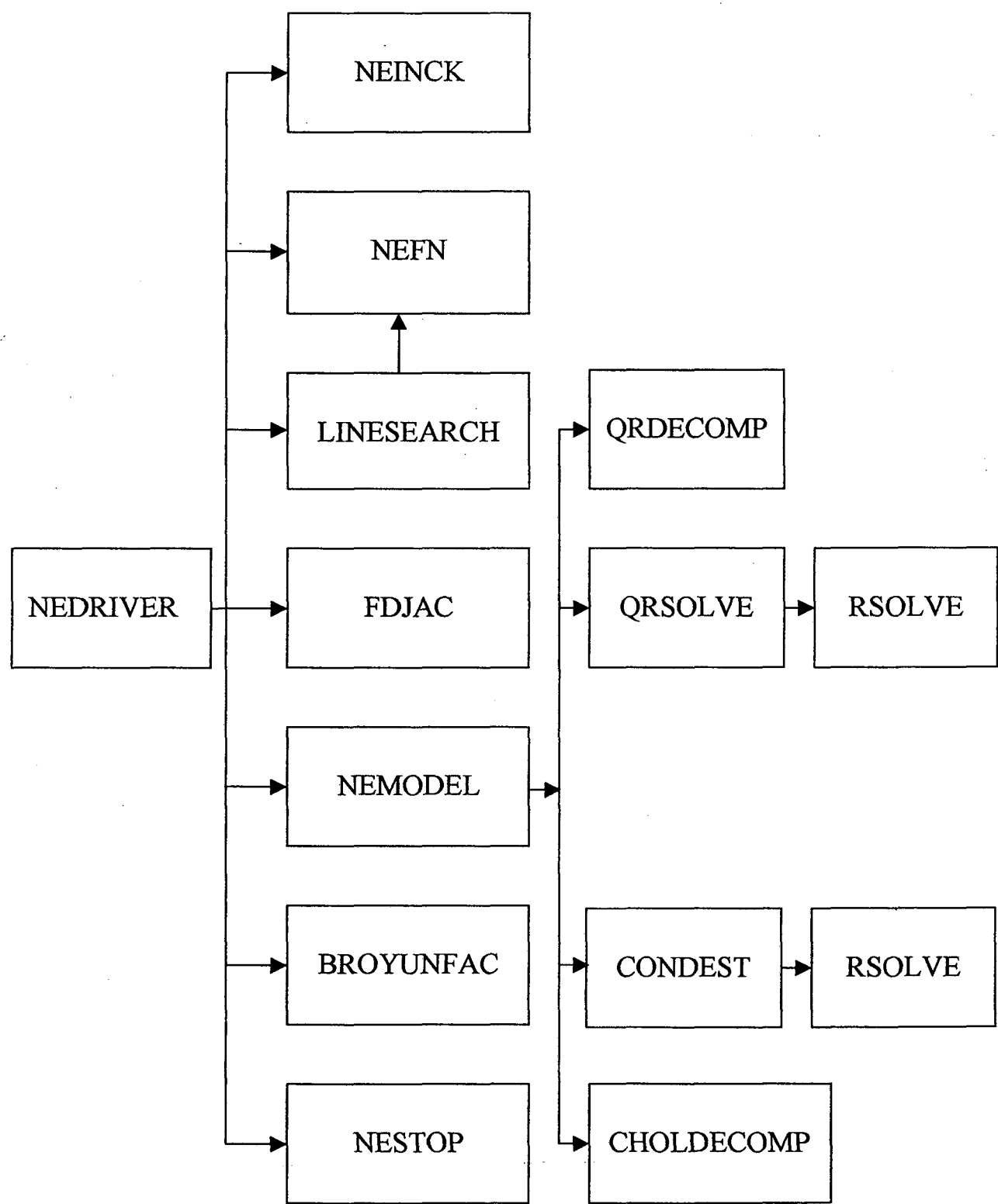


Figura A3.1 – Estrutura do algoritmo para solução de sistemas de equação não-linear.



das incógnitas a serem determinadas; função, uma variável “string” que contém o nome da rotina que determina o valor do vetor  $F(X_0)$ , rotina esta provida pelo usuário como um arquivo do tipo função do MATLAB. Por exemplo, para encontrar os valores de  $x$ ,  $y$  e  $z$  que resolve o sistema de equações:

$$\log(x) + \cos(y) + z^3 - 9 = 0$$

$$x^3 + 2^y + z - 6 = 0$$

$$x - y + z - 3 = 0$$

use, no MATLAB,  $X = \text{nedriver}(\text{'nome'}, X_0)$  onde **nome** é o seguinte arquivo do MATLAB, a ser fornecido pelo usuário:

```
function q = nome(p)
x = p(1); y = p(2); z = p(3);
q = zeros(3,1);
q(1) = log(x)+cos(y)+z^3 - 9;
q(2) = x^3 + 2^y + z - 6;
q(3) = x - y + z - 3;
```

A forma mais completa de uso do módulo NEDRIVER é:

```
[XF,TERMCODE,PATH] = nedriver(FVEC,X0,DETAILS,FPARAM,JAC,SCALE)
```

onde as variáveis tomam o seguinte significado:

#### a) Parâmetros de Entrada

- FVEC - Nome de uma função que mapeia  $n$ -vetores em  $n$ -vetores.
- X0 - Hipótese inicial de uma solução, ponto de partida para iterações.
- DETAILS - (opcional) Vetor cujo elementos selecionam várias opções de algoritmo e especifica várias tolerâncias.
- FPARAM - (opcional) Um conjunto de parâmetros (constantes) que é passado como um segundo argumento para FVEC e JAC.
- JAC - (opcional) O nome de uma função que implementa a Matriz Jacobiana (se disponível) da função denominada FVEC.
- SCALE - (opcional) Valores 'Típicos' de  $X$  (1a. coluna) e  $F$  (2a. coluna) para propósito de normalização.

#### b) Parâmetro de Saída

- XF - Aproximação final da solução.
- TERMCODE - (opcional) Indica a razão da parada.
- PATH - (opcional) Retorna a sequência de iterações.

Todos os vetores devem ser do tipo coluna.

```
function [xf,termcode,path] = nedriver(fvec,x0,details,fparam,jac,scale)
```

```
%
% Passo 1 (INICIALIZAÇÃO).
if (nargin < 3)
    details = zeros(16,1);
end
i = length(details);
if (i < 16)
    details((i+1):16,1) = zeros(16-i,1);% Para details não especificado.
end
if (nargin < 4)
    details(15) = 0;           % Nenhum parâmetro para passar.
elseif isempty(fparam)
    details(15) = 0;
else
    details(15) = 1;
end
if (details(15) == 0)
    fparam = [];
end
if (nargin < 5)
    details(4) = 0;           % Jacobiano Analítico não fornecido.
elseif isempty(jac)
    details(4) = 0;
end
if (details(4) == 0)
    jac = "";
end
if (nargin < 6)
    scale = [];               % Normalização não fornecida.
    if (details(16) == 2)
        details(16) = 1;
    end
end
if (nargout < 3)
    details(14) = 0;          % Nenhuma trajetória de saída.
else
    details(14) = 1;
end
if details(14), path = x0.'; end
if (details(1) == 2), btrack = []; end
nofun = 0;                   % Número de funções avaliadas.
%
% Passo 2.
if (details(16) > 0) % Poderá necessitar F(x0) para normalizar.
    if details(15)
        [fc,FVplus,nofun] = nefn(x0,ones(length(x0),1),fvec,nofun,fparam);
    else
```

```

    [fc,FVplus,nofun] = nefn(x0,ones(length(x0),1),fvec,nofun);
end
else
    FVplus = zeros(length(x0),1);
end
[details,Sx,SF,termcode] = neinck(x0,FVplus,details,scale);
%
% Passo 3.
if (termcode < 0)
    xf = x0;
    if details(14), path = [path;xf.']; end
    return
end
%
% Passo 4.
itncount = 0;
%
% Passo 5.
if details(15)
    [fc,FVplus,nofun] = nefn(x0,SF,fvec,nofun,fparam);
else
    [fc,FVplus,nofun] = nefn(x0,SF,fvec,nofun);
end
%
% Passo 6.
consecmax = 0;
if (max(SF .* abs(FVplus)) <= 1E-2 * details(8))
    termcode = 1;
else
    termcode = 0;
end
%
% Passo 7.
if (termcode > 0)
    xf = x0;
    if (details(14)), path = [path;xf.']; end
else
    if details(4)
        if details(15)
            [Jc,tmp] = feval(jac,x0,fparam);
        else
            [Jc,tmp] = feval(jac,x0);
        end
        nofun = tmp + nofun;
    else
        [Jc,nofun] = fdjac(fvec,FVplus,x0,Sx,details,nofun,fparam);
    end
    gc = Jc' * (FVplus .* (SF.^2)); FVc = FVplus;
end

```

```

%
% Passo 8.
xc = x0;
%
% Passo 9.
restart = 1; norest = 0;
%
% Passo 10 (ITERAÇÃO).
if (details(1) > 0), clc, end
while (termcode == 0)
    itncount = itncount + 1;
    if (details(4) | details(3) | (1-details(5)))
        [M,Hc,sN] = nemodel(FVc,Jc,gc,SF,Sx,details(2));
    else
        error('Modelo Fatorado não implementado.')
    end
    if (details(2) == 1)
        [retcode,xplus,fplus,FVplus,maxtaken,nofun,btrack] = ...
linesearch(xc,fc,fvec,gc,sN,Sx,SF,details,nofun,btrack,fparam);
    elseif (details(2) == 2)
        error('Hookstep não implementado.')
    else
        error('Dogleg não implementado.')
    end
    if ((retcode ~= 1) | (restart) | (details(4)) | (details(3)))
        if (details(4))
            if details(15)
                [Jc,tmp] = feval(jac,xplus,fparam);
            else
                [Jc,tmp] = feval(jac,xplus);
            end
            nofun = tmp + nofun;
        elseif (details(3))
            [Jc,nofun] = fdjac(fvec,FVplus,xplus,Sx,...
                details,nofun,fparam);
        elseif (details(5))
            error('Método Secante não implementado.')
        else
            Jc = broyunfac(Jc,xc,xplus,FVc,FVplus,Sx,details(13));
        end
        if (details(5))
            error('Cálculo do Gradiente para o método fatorado não implementado.')
        else
            gc = Jc' * (FVplus .* (SF.^2));
        end
        [consecmax,termcode] = nestop(xc,xplus,FVplus,fplus,gc,...
            Sx,SF,retcode,details,itncount,maxtaken,consecmax);
    end
    if (((retcode == 1) | (termcode == 2)) & (1-restart) & (1-details(4)) & (1-details(3)))

```



```

[Jc,nofun] = fdjac(fvec,FVc,xc,Sx,details,nofun,fparam);
gc = Jc' * (FVc .* (SF.^2));
if ((details(2) == 2) | (details(2) == 3))
    details(7) = -1;
end
restart = 1; norest = norest + 1;
else
    if (termcode > 0)
        xf = xplus;
        if (details(14)), path = [path;xf.']; end
    else
        restart = 0;
        if (details(14)), path = [path;xplus.']; end
    end
    xc = xplus; fc = fplus; FVc = FVplus;
    if (details(1) > 0)
        home
        disp('A iteração corrente é: ')
        xc
    end
end
end
if (details(1) == 2)
    disp('Aperte a tecla ENTER p/ ver a estatística.')
    fprintf([' ',7])
    pause
    clc
    format compact
    disp('Função: ')
    fvec
    disp('Ponto de Partida: ')
    x0.'
    disp('Condição de Parada: ')
    termcode
    disp('Número de Iterações: ')
    itncount
    disp('Número Total de Funções Avaliadas: ')
    nofun
    disp('Final norm(F(x)): ')
    norm(FVc)
    if ((1-details(3)) & (1-details(4)))
        disp('Número de Partidas p/ o Método Secante: ')
        norest
    end
    disp('Informação de Backtrack: ')
    btrack
    pause
end

```

### A3.2.2 – MÓDULO NEINCK

Verifica os valores de opções do algoritmo, tolerâncias e outros parâmetros de entrada fornecidos pelo usuário. Designa valores para as opções do algoritmo e tolerâncias, que não foram fornecidas pelo usuário, e para as constantes  $S_x$ ,  $S_f$  e  $\eta$ .

```
function [dout,Sx,SF,termcode] = neinck(x0,F0,din,scale)

termcode = 0; dout = din;
%
% Passo 1.
n = length(x0);
if (n < 1)
    termcode = -1;
    return
end
%
% Passos 2 e 3.
[l,m] = size(scale);
if (dout(16) == 2)
    if ((l==n) & (m==2))
        Sx = ones(n,1)./abs(scale(:,1)); SF = ones(n,1)./abs(scale(:,2));
    else
        dout(16) = 1;
    end
end
if (dout(16) == 0)
    Sx = ones(n,1); SF = ones(n,1);
end
if (dout(16) == 1)
    if (any(x0==0))
        x0(find(x0==0)) = ones(sum(x0==0),1);
    end
    if (any(F0==0))
        F0(find(F0==0)) = ones(sum(F0==0),1);
    end
    Sx = ones(n,1)./abs(x0); SF = ones(n,1)./abs(F0);
end
%
% Passo 4.
if (dout(12) <= 0)
    dout(13) = eps;
else
    dout(13) = max(eps,10^(-dout(12)))
end
if (dout(13) > .01)
```

```

termcode = -2;
return
end
%
% Passo 5.
if (dout(2) <= 0)
    dout(2) = 1; % Default para procura linear.
end
if (((dout(2) == 2) | (dout(2) == 3)) & (dout(7) <= 0))
    dout(7) = -1;
end
%
% Passo 6.
if (dout(6) <= 1)
    dout(6) = 100; % Default para limite de 100 iterações.
end
if (dout(8) <= 0)
    dout(8) = eps ^ (1/3); % fvectol.
end
if (dout(9) <= 0)
    dout(9) = eps ^ (2/3); % steptol.
end
if (dout(10) <= 0)
    dout(10) = eps ^ (2/3); % mintol.
end
if (dout(11) <= 0)
    dout(11) = 1000 * max(norm(Sx .* x0), norm(diag(Sx))); % maxstep.
End

```

### A3.2.3 – MÓDULO NEFN

Avalia o vetor de funções  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  e calcula a soma dos quadrados para as equações não-lineares.

```

function [fplus,FVplus,nofun] = nefn(xplus,SF,fvec,nofun,fparam)

if (nargin < 5)
    FVplus = feval(fvec,xplus);
else
    FVplus = feval(fvec,xplus,fparam);
end
fplus = .5 * sum((SF .* FVplus).^2); nofun = nofun + 1;

```

### A3.2.4 – MÓDULO FDJAC

Calcula o valor do Jacobiano  $J(\mathbf{x}_c)$ , por uma aproximação de diferenças finitas, usando os valores de  $F(\mathbf{x})$ .

```
function [J,nofun] = fdjac(fvec,fc,xc,sx,details,nofun,fparam)

%
% Passo 1.
n=length(fc); sqrteta = sqrt(details(13));
%
% Passo 2.
for j = 1:n
    stepsizej = sqrteta * max(abs(xc(j)),1/sx(j)) * (sign(xc(j))+(xc(j)==0));
% Incorpora uma regra de tamanho do passo diferente,
% muda a linha anterior.
    tempj = xc(j); xc(j) = xc(j) + stepsizej; stepsizej=xc(j)-tempj;
% A linha anterior reduz levemente o erro de precisão finita,
% ver a seção 5.4 do livro.
    if details(15)
        fj = feval(fvec,xc,fparam); % Avalia função w/parametros.
    else
        fj = feval(fvec,xc); % Avalia função w/o parametros.
    end
    nofun = nofun + 1; J(1:n,j) = (fj(1:n) - fc(1:n))/stepsizej;
    xc(j) = tempj;
end
```

### A3.2.5 – MÓDULO LINESEARCH

Busca unidirecional para uso com o Método de Newton de solução de equações não-lineares.

```
function [retcode,xp,fp,Fp,maxtaken,nofun,btrack] = ...
    linesearch(xc,fc,fn,g,p,sx,sf,details,nofun,btrack,fparam)
%
% Inicializa algumas variáveis de entrada.
n = length(xc); xp = zeros(n,1); fp = 0;
%
% Passo 1.
maxtaken = 0;
%
% Passo 2.
```



```

retcode = 2;
%
% Passo 3.
alpha = 1E-4;
%
% Passo 4.
newtlen = norm(sx .* p);
%
% Passo 5.
if (newtlen > details(11))
    p = p * (details(11) / newtlen); newtlen = details(11);
end
%
% Passo 6.
initslope = g'*p;
%
% Passo 7.
rellength = max(abs(p)./max(abs(xc),(ones(n,1)./sx)));
%
% Passo 8.
minlambda = details(9)/rellength;
%
% Passo 9.
lambda = 1;
%
% Passo 10.
bt = 0;
while (retcode >= 2)
    xp = xc + lambda*p; % Passo 10.1
    if details(15)
        [fp,Fp,nofun] = nefn(xp,sf,fn,nofun,fparam);% Passo 10.2
    else
        [fp,Fp,nofun] = nefn(xp,sf,fn,nofun);
    end
    if (fp <= fc + alpha*lambda*initslope) % Passo 10.3a
        retcode = 0;
        maxtaken = ((lambda == 1) & (newtlen > 0.99*details(11)));
    elseif (lambda < minlambda) % Passo 10.3b
        retcode = 1; xp = xc;
    else % Passo 10.3c
        if (lambda == 1)
            if (details(1) > 0), disp('Quadratic Backtrack.'), end
            bt = bt + 1; lambdatemp = -initslope / (2*(fp-fc-initslope));
        else
            if (details(1) > 0), disp('Cubic Backtrack.'), end
            bt = bt + 1;
            a = (1/(lambda-lambdaprev))*[1/lambda^2 (-1/lambdaprev^2); ...
                (-lambdaprev/(lambda^2)) lambda/(lambdaprev^2)] * ...
                [(fp-fc-lambda*initslope); (fpprev-fc-lambdaprev*initslope)];

```

```

disc = a(2)^2 - 3*a(1)*initslope;
if (a(1)==0)
    lambdatemp = -initslope/(2*a(2));
else
    lambdatemp = (-a(2)+sqrt(disc))/(3*a(1));
end
if (lambdatemp > 0.5*lambda)
    lambdatemp = 0.5*lambda;
end
end
lambdaprev = lambda; fpprev = fp;
if (lambdatemp <= 0.1*lambda)
    lambda = 0.1*lambda;
else
    lambda = lambdatemp;
end
end
end
if (bt < length(btrack))
    btrack(bt+1) = btrack(bt+1) + 1;
else
    btrack(bt+1) = 1;
end
end

```

### A3.2.6 – MÓDULO NEMODEL

Fatora o Jacobiano, calcula o novo passo de Newton e fornece a informação necessária para o algoritmo global. Se o Jacobiano é singular ou mal condicionado, modifica-o antes de calcular o passo de Newton.

```
function [m,h,sn] = nemodel(fc,J,g,sf,sx,globmeth)
```

```

%
% Passo 1.
n = length(J); m = diag(sf)*J;
%
% Passo 2.
[m,m1,m2,sing]=qrdecomp(m);
%
% Passo 3.
if (sing == 0)
    for j=2:n
        m(1:(j-1),j)=m(1:(j-1),j)/sx(j);
    end
    m2 = m2./sx; est = condest(m,m2);

```

```

else
    est=0.;
end
%
% Passo 4.
if (sing ==1) | (est > 1./eps)
    h = J'*diag(sf); h = h*h'; % calcula hnorm=norm(invDxHinvDx)
    tem = abs(h(1,:)) * (ones(n,1)./sx); hnorm=(1./sx(1))*tem;
    for i=2:n
        tem1=sum(abs(h(:,i))./sx); tem2=sum(abs(h(i,:))./(sx.)); temp=(1./sx(i))/(tem1+tem2);
        hnorm=max(temp,hnorm);
    end
    h = h + sqrt(n*eps) * hnorm * (diag(sx)^2);
    % calcula sn=inv(H)*g
    [m,maxadd] = choldecomp(h,0);
    % Mudado para usar no MATLAB
    % sn = nechsolv(g,m);
    sn = -m^(m\g);
else
    % Calcula o passo normal de Newton
    for j=2:n
        m(1:(j-1),j)=m(1:(j-1),j)*sx(j);
    end
    m2 = m2.*sx; sn = -sf.*fc; sn = qrsolve(m,m1,m2,sn);
    if (globmeth ==2) | (globmeth ==3)
        % lower triangle of M=R'
        m = triu(m) + triu(m)'; m = m - diag(diag(m)) + diag(m2);
    end
    if (globmeth == 2)
        % H=LL'
        for i=1:n
            for j=i:n
                h(i,j)=sum(m(i,1:i).*m(j,1:i));
            end
        end
    end
end
end
end
end

```

### A3.2.7 – MÓDULO BROYUNFAC

Atualiza uma matriz A, usando a atualização secante não-fatorada de Broyden.

```
function A = broyunfac(A,xc,xp,fc,fp,sx,eta)
```

```

%
% Passo 1.

```

```

n = length(A); s=xp-xc;
%
% Passo 2.
denom=norm(sx.*s)^2;
%
% Passo 3.
tempi = (fp - fc - A*s); ii = find(abs(tempi) < eta*(abs(fp)+abs(fc)));
tempi(ii) = zeros(length(ii),1); A = A + tempi*(s.*(sx.*sx))/denom;

```

### A3.2.8 – MÓDULO NESTOP

Decide quando parar a iteração durante o procedimento de solução de um Sistema de Equações Não-lineares.

```

function [consecmax,termcode] = nestop(xc,xp,F,Fnorm,g,sx,sf,...
    retcode,details,itncount,maxtaken,consecmax)

%
% Passo 1.
n = length(xc); termcode = 0;
%
% Passo 2.
if (retcode == 1)
    termcode = 3;
elseif (max(sf.*abs(F)) <= details(8))
    termcode = 1;
elseif (max(abs(xp-xc)./max(abs(xp),ones(n,1))./sx))<=details(9))
    termcode = 2;
elseif (itncount >= details(6))
    termcode = 4;
elseif (maxtaken)
    consecmax = consecmax + 1;
    if (consecmax == 5)
        termcode = 5;
    end
else
    consecmax = 0;
    if (details(4) | details(3))
        if (max(abs(g).*max(abs(xp),ones(n,1))./sx)/max(Fnorm,(n/2))) ...
            <= details(10))
            termcode = 6;
        end
    end
end
end

```



### A3.2.9 – MÓDULO QRDECOMP

Calcula a decomposição QR de uma matriz quadrada  $M$ . A decomposição é armazenada em  $M$ ,  $M_1$  e  $M_2$ .

```
function [M,M1,M2,sing] = qrdecomp(M)

%
% Verifica tamanho do argumento de entrada e aloca variáveis.
n = length(M); M1 = zeros(n,1); M2 = zeros(n,1);
%
% Passo 1.
sing = 0;
%
% Passo 2.
for k = 1:(n-1)
    eta = max(M(k:n,k));
    if (eta == 0)
        M1(k) = 0; M2(k) = 0; sing = 1;
    else
        M(k:n,k) = M(k:n,k) / eta; sigma = (sign(M(k,k))+(M(k,k)==0)) * norm(M(k:n,k));
        M(k,k) = M(k,k) + sigma; M1(k) = sigma * M(k,k); M2(k) = -eta * sigma;
        tau = (M(k:n,k)' * M(k:n,(k+1):n)) / M1(k);
        M(k:n,(k+1):n) = M(k:n,(k+1):n) - M(k:n,k) * tau;
    end
end
%
% Passo 3.
M2(n) = M(n,n);
```

### A3.2.10 – MÓDULO QRSOLVE

Resolve um sistema de equações lineares do tipo  $(QR)x = b$ , onde  $Q$  é uma matriz ortogonal e  $R$  uma matriz triangular superior.

```
function b = qrsolve(M,M1,M2,b)

%
% Passo 1.
n = length(M);
for j = 1:(n-1)
    tau = (M(j:n,j)' * b(j:n)) / M1(j); b(j:n) = b(j:n) - tau * M(j:n,j);
end
```

```
%
% Passo 2.
b = rsolve(M,M2,b);
```

### A3.2.11 – MÓDULO RSOLVE

Resolve um sistema de equações lineares do tipo  $Rx = b$ , onde a matriz  $R$  é triangular.

```
function b = rsolve(M,M2,b)

%
% Passo 1.
n = length(M); b(n) = b(n) / M2(n);
%
% Passo 2.
for i = (n-1):-1:1
    b(i) = (b(i) - M(i,(i+1):n) * b((i+1):n)) / M2(i);
end
```

### A3.2.12 – MÓDULO CONDEST

Estima o número de condição  $\ell_1$  de uma Matriz Triangular Superior  $R$ .

```
function est = condest(M,M2)

%
% Aloca variáveis.
n = length(M); p = zeros(n,1); pm = zeros(n,1); x = zeros(n,1);
%
% Passo 1 e 2.
est = norm( triu(M)-diag(diag(M))+diag(M2) ,1);
%
% Passo 3.
x(1) = 1/M2(1);
%
% Passo 4.
p(2:n) = M(1,2:n) * x(1);
%
% Passo 5.
for j = 2:n
    xp = (+1-p(j)) / M2(j);    xm = (-1-p(j)) / M2(j);    temp = abs(xp);    tempm = abs(xm);
    for i = (j+1):n
        pm(i) = p(i) + M(j,i)*xm;    tempm = tempm + abs(p(i))/abs(M2(i));
        p(i) = p(i) + M(j,i) * xp;    temp = temp + abs(p(i))/abs(M2(i));
    end
```

```

if (temp > tempm)
    x(j) = xp;
else
    x(j) = xm;    p((j+1):n) = pm((j+1):n);
end
end
%
% Passo 6 e 7.
est = est / norm(x,1);
%
% Passo 8.
x = rsolve(M,M2,x);
%
% Passo 9 e 10.
est = est * norm(x,1);

```

### A3.2.13 – MÓDULO CHOLDECOMP

Encontra uma matriz triangular inferior  $L$  tal que  $LL'$  é uma fatorização de  $H+D$ , onde  $D$  é uma matriz diagonal não-negativa, que é adicionada a  $H$  se for necessário fazê-la positiva definida, de modo que a fatorização seja possível. Se  $H$  já é positiva definida, a decomposição ordinária de Cholesky ( $D = 0$ ) é feita.

```

function [L,maxadd] = choldecomp(H,maxoffl)

%
% Verifica Argumentos de Entrada.
[m,n]=size(H);
if (m ~=n)
    error('Matriz H deve ser quadrada.')
end
%
% Passo 1.
minl=(eps^.25) * maxoffl;
%
% Passo 2.
if (maxoffl == 0.)
% Para quando H é positiva definida.
    maxoffl=sqrt(max(diag(H))); minl2=(eps^.5) * maxoffl;
end
%
% Passo 3.
maxadd=0.; % o máximo elemento da diagonal (so far) em D.
%
% Passo 4.
for j=1:n
    if (j==1)

```

```
L(j,j)=H(j,j);
else
  L(j,j)=H(j,j)-L(j,1:j-1)*L(j,1:j-1)';
end
minljj=0.;
for i=i+1:n
  if (j==1)
    L(i,j)=H(j,i);
  else
    L(i,j)=H(j,i)-L(i,1:j-1)*L(j,1:j-1)';
  end
  minljj=max(abs(L(i,j)),minljj);
end
minljj=max(minljj/maxoffl,minl);
if (L(j,j) > minljj^2)
  % Iteração Normal de Cholesky
  L(j,j)=sqrt(L(j,j));
else
  if (minljj < minl2)
    minljj=minl2; % Possível somente quando maxoffl=0
  end
  maxadd=max(maxadd,(minljj^2-L(j,j))); L(j,j)=minljj;
end
for i=j+1:n
  L(i,j)=L(i,j)/L(j,j);
end
end
```